

République Arabe d'Égypte
Ministère de L'Éducation et
de L'Enseignement et
L'Enseignement technique
Administration centrale des
affaires de livres




# Mathématiques

## Livre de l'élève

**Première secondaire** **Premier semestre**

2018 _ 2019

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى












République Arabe d'Égypte
Ministère de L'Éducation et
de L'Enseignement et
L'Enseignement technique
Administration centrale
des affaires de livres

# Mathématiques

## Livre de l'élève

**Première secondaire** **Premier semestre**



**Les mathématiques** ont des applications pratiques dans différents domaines dont la construction de routes, de ponts, l'urbanisme, l'élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et des lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan.

*La photo montre le pont Al Salam qui relie les deux rives du canal de suez*

**2018 – 2019**

## Rédigé par

M. **Omar Fouad Gaballa**

Prof. Dr. **Afaf Abo-ElFoutoh Saleh**

Prof. Dr. **Nabil Tawfik EIdhabai**

Dr. **Essam Wasfy Rouphaiel**

M. **Serafiem Elias Skander**

M. **Kamal Yones Kabsha**

## Révisé par

M. **Fathi Ahmed Chehata**

M. **Adel Mohamed Hamza**

M. **Nasser Saad Zaghloul**



Issued: 2013

D.N : 2013 / 7116

ISPN : 978 - 977 - 706 - 005 - 9

# Introduction

بسم اللّه الرحمن الرحيم

En présentant ce manuel, nous sommes heureux de vous clarifier la philosophie dont nous nous sommes inspirés pour édifier son contenu, en la résumant dans ce qui suit :

1. S'assurer que l'objectif essentiel de ce manuel et d'aider l'apprenant à résoudre les problèmes et à prendre les décisions, dans sa vie quotidienne pour une meilleure participation dans la société.

2. S'assurer du principe de la continuité de l'apprentissage tout au long de la vie, faisant en sorte que les élèves acquièrent un mode de pensée scientifique, et qu'ils pratiquent un apprentissage mêlé de désir et de convoitise. Ceci en misant sur le développement de leur habilitée à résoudre les problèmes, à déduire et démontrer les résultats, à utiliser l'auto apprentissage, l'apprentissage actif avec l'esprit de groupe, la discussion et le dialogue, le respect de l'opinion de l'autre, l'objectivité dans le jugement et la définition de quelques activités et réalisations nationales.

3. Présenter une vue globale consolidée entre la science, la technologie et la société (STS) qui reflète le rôle du progrès scientifique dans le développement de la société locale, en plus de cela l'insistance sur un comportement consciencieux dans l'utilisation des outils technologiques.

4. Développement des tendances positives envers les mathématiques, leurs études et l'estimation des savants.

5. Munir les élèves d'une culture complète pour une meilleure utilisation des ressources disponibles dans l'environnement.

6. Renforcer les bases de la connaissance et le développement des méthodes de pensée, développer les capacités scientifiques, ne pas surcharger inutilement et s'éloigner du par cœur. Dans ce but, il est important de mettre en valeur les notions et les principes généraux, les méthodes de recherche, de résolution, de la pensée qui distinguent les mathématiques du reste.

**A la lumière de ce qui précède, ce manuel est organisé comme suit :**

★ Division du manuel en unités complètes reliées entre elles. Chacune des ces unités a une introduction qui éclaircit son objectif, son contenu, son organisation et le lexique employé, en arabe et en anglais. Elles sont divisées en leçons dont l'objectif est indiqué à l'élève sous la rubrique 'A apprendre'. Chaque leçon commence par l'idée essentielle du contenu et l'exposition de la matière d'une manière progressive. Ces unités comportent aussi un ensemble d'activités, du niveau de l'élève, qui soulignent le lien entre différentes matières ainsi qu'avec la vie pratique. Ces activités prennent en compte les capacités des élèves, leurs différences individuelles et renforcent le travail en groupe pour compléter le sujet.

★ Nous avons proposé, dans chaque leçon, des exemples à difficulté croissante, différents niveaux de réflexion, des exercices d'entraînement sous la rubrique 'essaie de résoudre' et chaque leçon se termine par 'Test de compréhension'.

★ Chaque unité se termine par un résumé contenant les notions et les instructions employées.

**Finalement, nous espérons qu'avec ce manuel nous accomplirons le bien pour nos élèves et pour notre cher Égypte. Dieu nous est témoin, qu'il nous guide vers le bon chemin.**

# Plan du livre du premier semestre

| *Unité* | *Leçons* | *Notions abordées* | *Opérations intellectuelles et compétences mentales* | *Liens avec d'autres disciplines et avec la vie quotidienne.* |
|---|---|---|---|---|
| 1 Algèbre, relations et fonctions | **1 - 1: Résolution d'une équation du second degré à une inconnue** | Équation – Relation – Fonction – Facteur | ▸ Réflexion critique P6<br>▸ Résolution de problèmes P 6<br>▸ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la physique P6.<br>▸ Lien avec le sport P7. |
| | **1 - 2: Introduction aux nombres complexes** | Nombre imaginaire – Nombre complexe | ▸ Réflexion critique P9, 11, 12<br>▸ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la technologie P7.<br>▸ Lien avec l'électricité P12 . |
| | **1 - 3: Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré** | Racine – Discriminant – Équation | ▸ Réflexion critique P15<br>▸ Résolution de problèmes P15<br>▸ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la Santé P15. |
| | **1 - 4: Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes** | Somme de deux racines – Produit de deux racines | ▸ Réflexion orale P16<br>▸ Réflexion critique P19<br>▸ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon) | |
| | **1 - 5: signe d'une fonction** | Signe d'une fonction – Fonction positive – Fonction négative | ▸ Réflexion logique P20, 21, 22<br>▸ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon) | |
| | **1 - 6: Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue** | Inéquation | ▸ Réflexion logique P26<br>▸ Réflexion critique P27<br>▸ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon) | |
| 2 Similitude | **2 - 1: Similitude des polygones** | Similitude – Polygones semblables – Triangles semblables – Côtés correspondants – Angles superposables | ▸ Réflexion logique<br>▸ Réflexion inductive<br>▸ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la physique p.45<br>▸ Application de la vie quotidienne p.41 |
| | **2 - 2: Similitude des triangles** | Similitude – Similitude des triangles – Axiome | ▸ Réflexion logique<br>▸ Réflexion inductive<br>▸ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la physique p.47 |
| | **2 - 3: Relation entre les aires de deux polygones semblablese** | Périmètre – Aire – Aire d'un polygone – Côtés correspondants | ▸ Réflexion logique<br>▸ Réflexion inductive<br>▸ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la géographie p.55<br>▸ Lien avec l'agriculture p.58 |
| | **2 - 4: Application de la similitude dans le cercle** | Une corde – Une sécante – Une tangente – Un diamètre – Tangente commune extérieurement – Tangente commune intérieurement | ▸ Réflexion logique<br>▸ Réflexion inductive<br>▸ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) | ▸ Lien avec la géologie P64.<br>▸ Lien avec l'industrie P65.<br>▸ Lien avec la géométrie des trafiques P65.<br>▸ Lien avec l'espace P65. |

| *Unité* | *Leçons* | *Notions abordées* | *Opérations intellectuelles et compétences mentales* | *Liens avec d'autres disciplines et avec la vie quotidienne.* |
|---|---|---|---|---|
| 3 Théorèmes de la proportion dans un triangle | 3 - 1: **Droite parallèles et parties proportionnelles** | Parallélisme – Bissectrice – Médiane – Sécante | ▸ Réflexion logique – Réflexion inductive – Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)<br>▸ Modélisation des mathématiques P76<br>▸ Résolution de problème P80<br>▸ Réflexion critique P80<br>▸ Démonstration par des diagrammes (l'enchainement de la démonstration) P76 | ▸ Lutter contre la pollution P77.<br>▸ Lien avec les constructions P80.<br>▸ Lien avec l'industrie P80 |
| | 3-2 **Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles** | Bissectrice – Bissectrice intérieure – Bissectrice extérieure – Perpendiculaire | ▸ Réflexion logique – Réflexion inductive – Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)<br>▸ Réflexion critique P83<br>▸ Résolution de problème P86 | ▸ Lien avec l'art P41.<br>▸ Applications de la vie quotidienne P41. |
| | 3-3 **Applications de la proportionnalité dans un cercle** | Puissance – Point – Cercle – Corde – Tangente – Sécante – Diamètre – Cercles concentriques – Tangente commune extérieurement – Tangente commune intérieurement | ▸ Réflexion logique – Réflexion inductive – Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)<br>▸ Résolution de problème P93 | ▸ Lien avec les satellites P92. |
| 4 Trigonométrie | 4 - 1: **L'angle orienté** | Mesure en degrés – Angle orienté – Position standard – Mesure positive – Mesure négative – Angle équivalent | ▸ Réflexion critique P99<br>▸ Réflexion orale P99 | ▸ Lien avec le sport P102. |
| | 4-2 **Mesure en radians et mesure en degrés** | Mesure en degrés – Mesure en radians – Le radian | ▸ Réflexion critique P106 | ▸ Lien avec la technologie P106.<br>▸ Liens avec l'espace P107.<br>▸ Lien avec le sport P107.<br>▸ Lien avec l'industrie P107. |
| | 4-3 **Fonctions trigonométriques** | Fonction trigonométrique – Sinus – Cosinus – Tangente – Sécante – Cosécante – Cotangente | ▸ Réflexion critique P113 | |
| | 4-4 **Angles associés** | Angles associés | ▸ Réflexion critique P115 | |
| | 4-5 **Représentation graphique des fonctions trigonométriques** | La fonction Sinus – La fonction Cosinus – Valeur maximale – Valeur minimale | | ▸ Liens avec la physique P122. |
| | 4-6 **Trouver la mesure d'un angle à partir d'une fonction trigonométrique** | Fonction trigonométrique | ▸ Réflexion critique P124 | ▸ Lien avec la technologie P123.<br>▸ Lien avec le sport P124.<br>▸ Lien avec les voitures P124. |

# Sommaire

## Unité (1) Algèbre, relations et fonctions



## Unité (2) Similitude

## Unité (3) Théorèmes de la proportion dans un triangle



## Unité (4) Trigonométrie



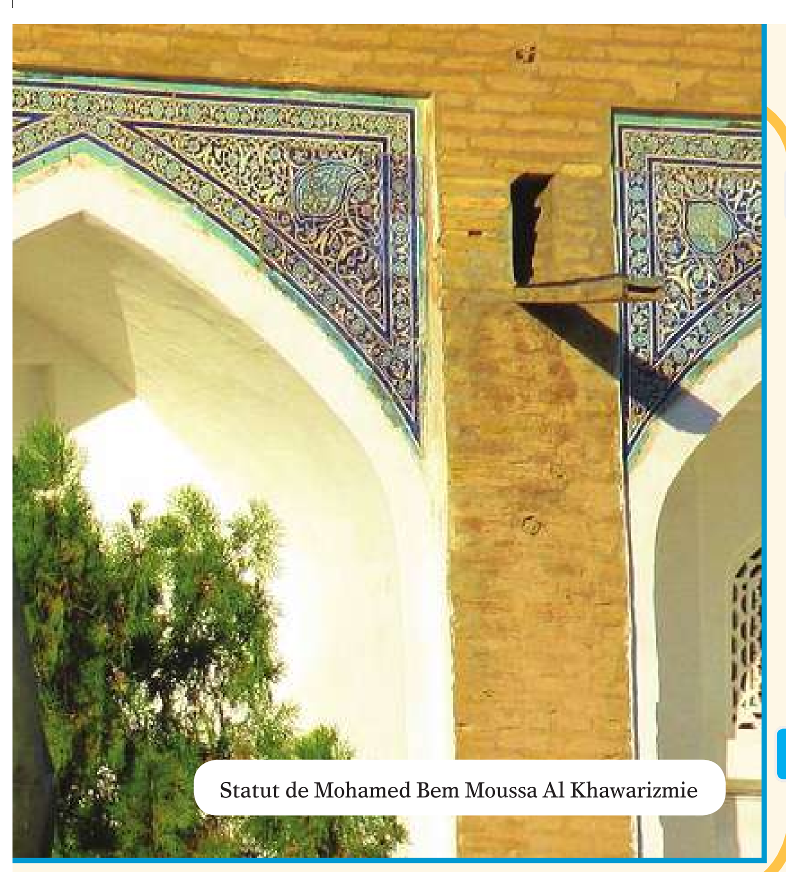

## Objectifs de l'unité

**Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :**

- Résoudre une équation du second degré à une inconnue algébriquement et graphiquement.
- Trouver la somme et le produit des racines de l'équation du second degré à une inconnue.
- Trouver les coefficients de certains termes d'une équation du second degré à une inconnue en connaissant l'une ou les deux de ses racines.
- Identifier le discriminant d'une équation du second degré à une inconnue.
- Trouver la nature des deux racines d'une équation du second degré à une inconnue en connaissant les coefficients de ses termes.
- Former une équation du second degré à une inconnue connaissant une autre équation du second degré à une inconnue.
- Trouver le signe d'une fonction.
- Avoir des connaissances sur les nombres complexes (Définition d'un nombre complexe, les puissances de i , écrire un nombre complexe sous forme algébrique, égalité de deux nombres complexes)
- Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue.

## Expressions de base

- Équation
- Racine d'une équation
- Coefficient d'un terme
- Discriminant d'une équation
- Signe d'une fonction
- Nombre complexe
- Nombre imaginaire
- Les puissances d'un nombre
- Inéquation



Statut de Mohamed Bem Moussa Al Khawarizmie

## Leçons de l'unité

**Leçon (1 – 1) :** Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

**Leçon (1 – 2) :** Introduction aux nombres complexes

**Leçon (1 – 3) :** Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

**Leçon (1 – 4)** : Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

**Leçon (1 – 5) :** Signe d'une fonction

**Leçon (1 – 6) :** Inéquation du second degré à une inconnue.

## Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – Papiers graphiques – Ordinateur – Logiciels

Quelques site web comme : www.phschool.com

## Historique

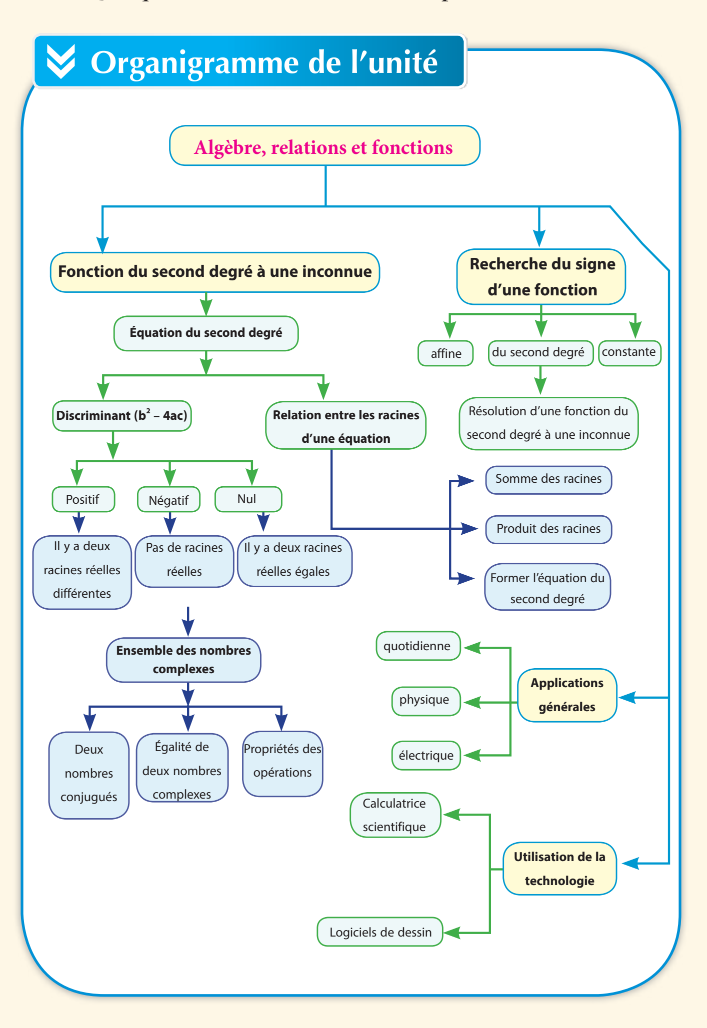
Le mot « Algèbre » est d'origine arabe. Il a été utilisé pour la première fois par Mohamed Bem Moussa Al Khawarizmie (neuvième siècle à l'époque du calife abbasside Al Maamoun) dans son livre « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison » Ce livre a été traduit en plusieurs langues européennes. Dans ce livre, il propose des méthodes pour résoudre les équations et par conséquent, il est considéré le fondateur de l'Algèbre qui faisait partie de l'Arithmétique. Al Khawarizmie a proposé de méthodes géométriques pour résoudre les équations du second degré. Ces méthodes sont en adéquation avec la méthode de complétion du trinôme carré parfait. Plusieurs savants arabes ont contribué à la résolution des équations, parmi lesquels il y a Omar Al Khayyam qui s'est intéressé à la résolution des équations du troisième degré.

Il est important de signaler que le papyrus d'Amos (1860 A.J.) montre des solutions de problèmes qui prouvent que les égyptiens de cette époque ont trouvé une méthode pour calculer la somme des termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

L'Algèbre est devenue maintenant une science bien avancée. Cette science a dépassé le simple traitement des nombres pour traiter des nouvelles notions mathématiques comme les ensembles, les matrices et les vecteurs etc.

Nous comptons sur vous, chers élèves, pour retrouver la gloire scientifique de l'époque pharaonique et l'époque islamique pendant lesquelles nos scientifiques ont contribué pour le progrès du monde entier.

## Organigramme de l'unité



# 1 - 1

# Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

### A apprendre

- La notion d'équation algébrique à une inconnue.
- La distinction entre équations, relations et fonctions.
- La résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue algébriquement et graphiquement.

### Expressions de base

- Équation
- Relation
- Fonction
- Facteur
- Coefficient

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique
- Papiers graphiques




Tu as déjà étudié les équations algébriques à une inconnue. Dans cette leçon, tu vas étudier les équations algébriques de deuxième degré à une inconnue.

Voici ce que nous avons déjà étudié des équations algébriques à une inconnue :

**1-** L'équation de la forme $a\,x + b = 0$ où $a \neq 0$ est une **équation du premier degré à une inconnue qui est $x$** dans ce cas (car la plus grande puissance de la variable x est 1)

**2-** L'équation de la forme $ax^2 + b\,x + c = 0$ où $a \neq 0$ est une **équation du second degré à une inconnue qui est $x$** dans ce cas (car la plus grande puissance de la variable x est 2)

**Par conséquent,** l'équation : $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ est appelée une équation du troisième degré (car la plus grande puissance de la variable x est 3)

## Équations, relations et fonctions :

Nous avons déjà étudié la résolution d'une équation du second degré algébriquement par les deux méthodes suivantes :

(1) Par la factorisation de l'expression $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$ (si la factorisation est possible dans $\mathbb{R}$)

(2) En utilisant la formule générale. Dans ce cas, les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ où a est le coefficient de $x^2$, $b$ est le coefficient de x et c est le terme constant

Maintenant, nous allons étudier la résolution d'une équation du second degré à une inconnue graphiquement.




### Résolution d'une équation du second degré graphiquement

**Exemple**

**1** **Résous l'équation :** $x^2 + x - 6 = 0$ graphiquement, puis vérifie le résultat

**Solution**

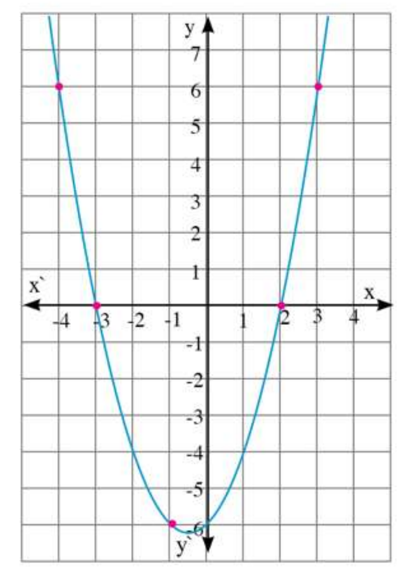
Pour résoudre l'équation $x^2 + x - 6 = 0$, on suit les étapes suivantes :

★ On trace la représentation graphique de la fonction f telle que
$f(x) = x^2 + x - 6$

★ On détermine l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. C'est l'ensemble solution de l'équation.

Pour tracer la fonction $f(x) = y$, $y = x^2 + x - 6$,
on dresse un tableau pour quelques valeurs de x, puis on calcule les valeurs des y correspondantes comme suit :

| *x* | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |




★ On détermine ces points dan un repère orthogonal, puis on les relie comme dans la figure ci-contre.

Du graphique, on trouve que les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont $x = -3$ et x = 2. Donc l'ensemble solution de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ est **{-3, 2}.**

**Tu peux utiliser la solution algébrique pour vérifier la solution graphique comme suit** :

Dans l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$ ,
on factorise le trinôme, On obtient : $(x + 3)(x - 2) = 0$
Soit $x + 3 = 0$ d'où $x = -3$
ou $x - 2 = 0$ d'où $x = 2$ Donc l'ensemble solution est {- 3, 2}

**Rappel**

**Si a et b sont deux nombres réels et si a × b = 0 alors, a = 0 ou b = 0**

**Vérification de la solution :**

Pour x = - 3: le membre gauche de l'équation $= (-3)^2 + (-3) - 6$
$= 9 - 3 - 6 = 0 =$ membre droit

Donc $x = -3$ vérifie l'équation.

Pour $x = 2$ : le membre gauche de l'équation $= (2)^2 + (2) - 6$
$= 4 + 2 - 6 = 0 =$ membre droit

Donc $x = 2$ vérifie l'équation.

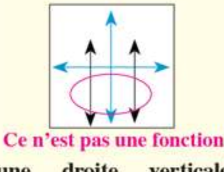



**Test de la droite verticale**



**C'est une fonction**

**une droite verticale coupe la courbe en un seul point**



**Ce n'est pas une fonction**

**une droite verticale coupe la courbe en deux points au moins**

**Notons que :**

**1-** Dans la représentation graphique de la fonction $y = x^2 + x - 6$

➢ la relation représente une fonction car une droite verticale coupe la courbe en un seul point.

➢ le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des nombres réels.

➢ L'ensemble image de la fonction est $[-6\frac{1}{4}, +\infty[$

**2-** Pour exprimer la fonction, on utilise le symbole f(x) au lieu de y qui se lit «f de x»

**Utilisation d'une calculatrice scientifique :**

Il est possible de dresser le tableau précédent en utilisant une calculatrice scientifique comme suit :

**1-** Préparer la calculatrice en appuyant sur les touches

Mode 7 TABLE

**2-** **Introduire les données :** On écrit l'expression algébrique de la fonction en appuyant sur les touches suivantes:

ALPHA ( [X] $x^2$ + ALPHA ) [X] – 6

**3-** On appuie sur la touche = puis on introduit le début de l'intervalle START? -4 puis on appuie sur la touche =

**4-** On introduit la longueur de l'intervalle STEP , on écrit le chiffre 3 , en fin on appuie sur la touche =

**5-** Le tableau sera dressé dans la calculatrice. On peut faire apparaître les informations en appuyant sur la touche REPLAY. vers le haut ou vers le bas

| | X | F(X) |
|---|---|---|
| 1 | -4 | 6 |
| 2 | -3 | 0 |
| 3 | -2 | -4 |
| 4 | -1 | -6 |
| 5 | 0 | -6 |
| 6 | 1 | -4 |
| 7 | 2 | 0 |
| 8 | 3 | 6 |

Pour sortir de ce programme, on appuie sur les touches Mode 1

## Réflexion critique :

**1-** une fonction, est - elle nécessairement une relation ? Explique par des exemples.

**2-** Peut-on représenter les relations et les fonctions par des équations? Justifie la réponse.

## Essaie de résoudre

**1** Représente la relation $y = x^2 - 4$ graphiquement. Du graphique, trouve l'ensemble solution de l'équation $x^2 - 4 = 0$ Si $y = f(x)$, démontre que f est une fonction, puis détermine son domaine de définition et son ensemble image (Discute avec ton professeur)

## Exemple

**2** **Lien avec la physique :** Un projectile est lancé verticalement à une vitesse v de 24,5 m/s. Calcule le temps t en secondes pris pour que le projectile atteigne la hauteur d où d est égale à 19,6 mètres sachant que la relation entre d et t est donnée par la relation : $d = v\,t - 4,9\,t^2$.



**Solution**

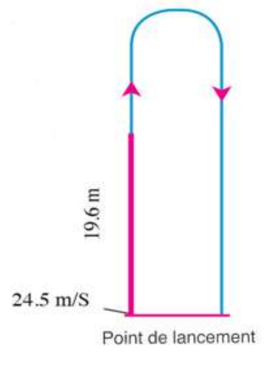
**Dans la relation $d = v\,t - 4,9\,t^2$, si d = 19,6 mètres et v = 24,5 m/s, alors :**

$\therefore\ 19,6 = 24,5\,t - 4,9\,t^2$ — **En divisant les deux membres par 4,9 on obtient :**

$\therefore\ 4 = 5t - t^2$ — **En Sumplifiant**

$\therefore\ t^2 - 5t + 4 = 0$ — **En factorisant le trinôme :**

$\therefore\ (t - 1)(t - 4) = 0$ — **d'où** $t = 1$ s ou $t = 4$ s.




**Interprétation de l'existence de deux réponses :** Le projectile atteint la hauteur de 19,6 m après une seconde puis il continue à monter jusqu'à ce que il atteigne la hauteur maximale, puis il redescend passant par le point de lancement 4 secondes après le départ.

### Essaie de résoudre

**2** **Lien avec le sport :** Dans un jeu olympique, un concourant saute d'un plongeoir d'une hauteur de 9,8 mètres de la surface de l'eau vers le haut. Si la hauteur d en mètres du concourant de la surface de l'eau après un temps t secondes est déterminée par la relation $d = -4{,}9t^2 + 2{,}45t + 9{,}8$ , trouve à un centième près le temps nécessaire pour que le concourant atteigne la surface de l'eau.

## Activité

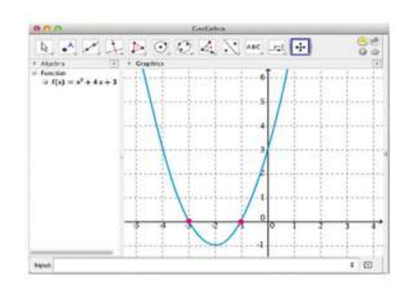
On peut utiliser des logiciels de droit libre sur Internet. Par exemple, on peut télécharger le logiciel "GeoGebra" à l'adresse (http://www.geogebra.org/cms/fr/) ou télécharger le logiciel Graph à l'adresse (http://www.padowan.dk/) Ces deux logiciels permettent de tracer des courbes de fonctions.

**A** On peut tracer la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 4x + 3$

On détermine l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$

ou $x^2 + 4x + 3 = 0$

en déterminant les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Ce sont -3 et -1. Donc l'équation a deux racines dans $\mathbb{R}$ qui sont -3 et -1



**B** On trace la courbe représentative de la fonction f telle que

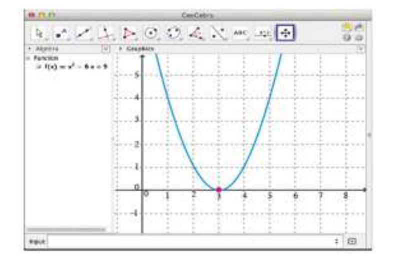
$f(x) = x^2 - 6x + 9$

**On pose $f(x) = 0$,** On obtient $(x - 3)^2 = 0$ d'où $x = 3$

Du graphique, on trouve que le sommet de la courbe est tangent à l'axe des abscisses en $x = 3$

Cette solution est conforme à la solution algébrique.

Donc l'équation a une racine double qui est 3.



**C** On trace la courbe représentative de la fonction f telle que

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

On pose $f(x) = 0$. On obtient $x^2 - 2x + 4 = 0$

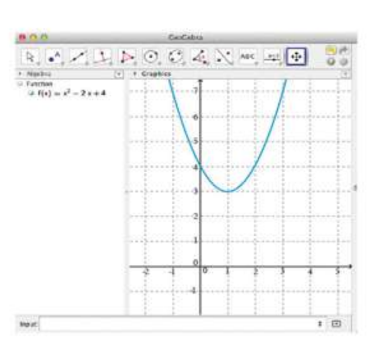
Vu que la factorisation du trinôme n'est pas possible, on utilise la formule générale pour calculer les racines de l'équation.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Si $a = 1$ , $b = -2$ , $c = 4$**

$$\therefore\ x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

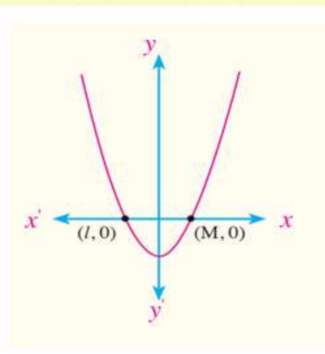
$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$



Donc il n'y a pas de solutions réelles qui vérifient l'équation.
Dans la représentation graphique de la fonction, on trouve que la courbe ne coupe l'axe des abscisses en aucun point. Par conséquent, l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ est $\phi$.

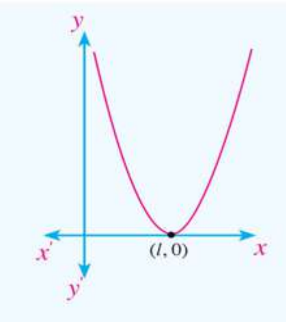
De ce qui précède, on trouve que pour résoudre une équation du second degré, il y a trois cas :

**1-** La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points.



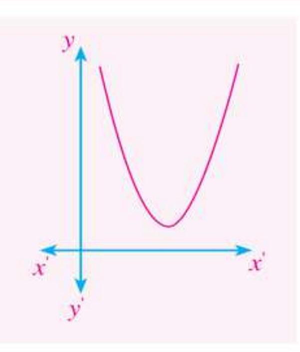

Il y a deux solutions dans $\mathbb{R}$ ,
L'ensemble solution est {L , M}

**2-** La courbe coupe l'axe des abscisses en un seul point




Il y a une solution dans $\mathbb{R}$ ,
L'ensemble solution est {M}

**3-** La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.




Il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$ ,
L'ensemble solution est $\phi$



## Test de compréhension

① **Résolution de problèmes:** Si la somme des nombres entiers consécutifs $(1 + 2 + 3 + ... + n)$ est donnée par la relation $S = \frac{n}{2}(1 + n)$, combien de nombres entiers consécutifs faud-il additionner à partir de 1 pour que la somme soit égale à 136.

# Introduction aux nombres complexes

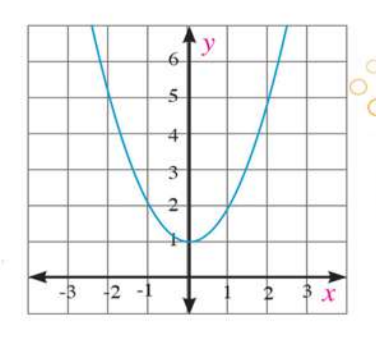
# 1 - 2




Tu as déjà étudié plusieurs ensembles de nombres comme l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous avons vu que chaque ensemble est un élargissement de l'ensemble qui le précède pour pouvoir résoudre de nouvelles équations dont il est impossible de trouver une solution dans l'ensemble qui le précède. Maintenant si on observe l'équation $x^2 = -1$ , on trouve qu'elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, car il n'existe pas un nombre réel dont le carré est égal à (-1) et par conséquent, il n'existe pas un nombre réel qui vérifie l'équation d'où le besoin d'un nouvel ensemble de nombres. Cet ensemble est appelé l'ensemble des nombres complexes.

La figure ci-contre montre la représentation graphique de la fonction $y = x^2 + 1$

On remarque que la courbe représentative de la fonction ne coupe pas l'axe des abscisses et par conséquent, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Donc il est nécessaire de trouver un nouvel ensemble de nombres qui permet de résoudre ce type d'équations.




## A apprendre

- La notion du nombre imaginaire.
- Les puissances de i.
- La notion d'un nombre complexe.
- Égalité de deux nombres complexes.
- Opérations sur les nombres complexes.

## Expressions de base

- Nombre imaginaire
- Nombre complexe




### Le nombre imaginaire

Tout nombre de la forme a i où a est un nombre réel et i est tel que $i^2 = -1$ est un nombre imaginaire.

Les nombres 2i, - 5i et $\sqrt{3}$ i sont des **nombres imaginaires**

**Donc on écrit** $\sqrt{-3} = \sqrt{3i^2} = \pm\sqrt{3}\,i$,

$\sqrt{5} = \sqrt{5\,i^2} = \pm\sqrt{5}\,i$ et ainsi de suite...

$\sqrt{-243} = \sqrt{9^2 \times 3\,(-1)} = 9\sqrt{3}\,i$

**Réflexion critique :** Si a et b sont deux nombres réels négatifs, que peut-on dire de l'égalité $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ? Justifie ta réponse par des exemples numériques.

## Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

## Puissances entières de i :

Toutes les règles de puissance qui sont déjà étudiées s'appliquent sur le nombre i. Nous pouvons calculer les différentes puissances du nombre i comme suit :

$i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = i^2 . i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times (-1) = 1$ $\quad i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

**De manière générale,** $i^{4n} = 1$ , $i^{4n+1} = i$ , $i^{4n+2} = -1$ , $i^{4n+3} = -i$ **où** $n \in \mathbb{Z}$

**Exemple**

**2** Mets chacun des nombres suivants sous la forme la plus si

**A** $i^{30}$ **B** $i^{43}$ **C** $i^{-61}$ **D** $i^{4n+19}$

**Solution**

**A** $i^{30} = (i^4)^7 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

**B** $i^{43} = (i^4)^{10} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$

**C** $i^{-61} = (i^4)^{-16} \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$

**D** $i^{4n+19} = i^{4n} \times i^{19} = 1 \times (i^4)^4 \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$

**Essaie de résoudre**

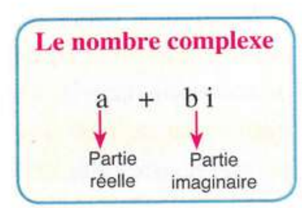
**1** Mets chacun des nombres suivants sous la forme la plus simple :

**A** $i^{24}$ **B** $i^{37}$ **C** $i^{-43}$ **D** $i^{-51}$ **E** $i^{4n+29}$ **F** $i^{4r+42}$

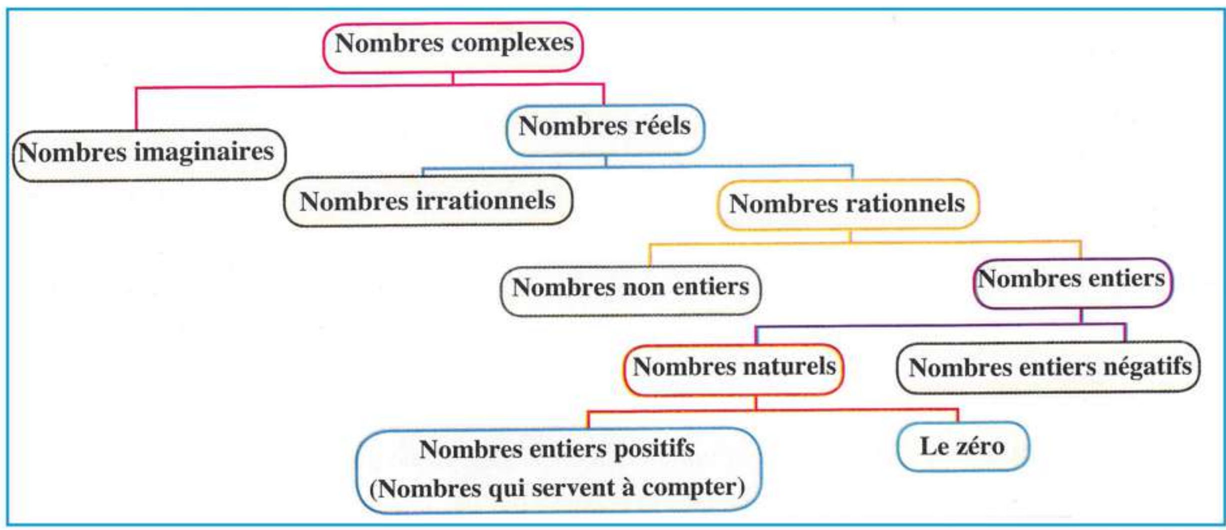



### Le nombre complexe

**Le nombre complexe** est un nombre qu'on peut mettre sous la forme $a + bi$ où a et b sont deux nombres réels et i est tel que $i^2 = -1$.




La figure suivante montre les ensembles des nombres faisant parties de l'ensemble des nombres complexes.



Si a et b sont deux nombres réels, alors le nombre z où $z = a + bi$ , est un nombre complexe. a est appelée la partie réelle du nombre complexe z et b est appelée la partie imaginaire du nombre complexe z

Si $b = 0$ , alors $z = a$ est un nombre réel et si $a = 0$, alors $z = bi$ est un nombre imaginaire pur

**Exemple**

**3** Résoudre l'équation $9x^2 + 125 = 61$

**Solution**

$9x^2 + 125 = 61$

$9x^2 + 125 - 125 = 61 - 125$ — On ajoute (-125) à chacun des deux membres

$9x^2 = -64$ — On simplifie

$x^2 = -\frac{64}{9}$ — On divise les deux membres par 9

$x = \pm\sqrt{\frac{-64}{9}}$ — On calcule la racine carrée de chaque membre

$x = \pm\sqrt{\frac{64}{9}}\, i = \pm\frac{8}{3}\, i$

**Essaie de résoudre**

**2** Résous chacune des équations suivantes :

**A** $3x^2 + 27 = 0$ **B** $5x^2 + 245 = 0$ **C** $4x^2 + 100 = 75$

### Égalité de deux nombres complexes :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

**Si :** $a + b\,i = c + d\,i$ , **alors :** $a = c$ et $b = d$ et réciproquement.

**Exemple**

**4** Trouve les valeurs de x et y qui vérifient l'équation : $2x - y + (x - 2y)i = 5 + i$ où x et y sont deux nombres réels et $i^2 = -1$

**Solution**

Les parties réelles sont égales et les parties imaginaires sont égales.

$2x - y = 5$ , $x - 2y = 1$

En résolvant le système des deux équations, on obtient $x = 3$ , $y = 1$

### Essaie de résoudre

**3** Trouve les valeurs de x et y qui vérifient chacune des équations suivantes :

**A** $(2x + 1) + 4y\,i = 5 - 12\,i$

**B** $2x - 3 + (3y + 1)\,i = 7 + 10\,i$




## Opérations sur les nombres complexes

Nous pouvons utiliser les propriétés de la commutativité, l'associativité et de la distributivité pour l'addition et la multiplication des nombres comme dans les exemples suivants :

**Exemple**

**5** Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

**A** $(7 - 4i) + (2 + i)$

**B** $(2 + 3i)(3 - 4i)$

**Solution**

**A** $(7 - 4i) + (2 + i)$

$= (7 + 2) + (-4 + 1)\,i$ — utiliser les propriétés de la commutativité et la distributivité

$= 9 - 3\,i$ — en simplifiant

**B** $(2 + 3i)(3 - 4i)$

$= 2(3 - 4i) + 3i(3 - 4i)$ — utiliser la propriété de la distributivité

$= 6 - 8i + 9\,i - 12\,i^2$ — en développant

$= 6 - 8i + 9i + 12$ — car $i^2 = -1$

$= (6 + 12) + (-8 + 9)\,i = 18 + i$ — en simplifiant

### Essaie de résoudre

**4** Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

**A** $(12 - 5i) - (7 - 9i)$

**B** $(4 - 3i)(4 + 3i)$

**C** $(5 - 6i)(3 + 2i)$

### Deux nombres conjugués

Les deux nombres a + b i et a – b i sont appelés deux nombres conjugués. **Par exemple,** 4 – 3i et 4 + 3i sont deux nombres conjugués où :

$$(4 - 3i)(4 + 3i) = (4)^2 - (3i)^2$$

$$= 16 - 9i^2 = 16 - 9(-1) = 25$$ **(le résultat est un nombre réel)**

**Réflexion critique :**

La somme de deux nombres conjugués est-elle toujours un nombre réel ? Explique ta réponse.

Le produit de deux nombres conjugués est-il toujours un nombre réel ? Explique ta réponse.

**Exemple**

**6** Trouve les valeurs de x et y qui vérifient l'équation :

$$\frac{(2 + i)(2 - i)}{3 + 4i} = x + i\,y$$

**Solution**

$\frac{4 - i^2}{3 + 4i} = x + iy$ **en développant**

$\frac{4 + 1}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = x + iy$ **en multipliant le numérateur et le dénominateur par (3 - 4i)**

$\frac{5(3 - 4i)}{25} = x + iy$ **en simplifiant**

$\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i = x + yi$ **en appliquant la règle de l'égalité de deux nombres complexes**

**Donc** $x = \frac{3}{5}$ , $y = -\frac{4}{5}$

**Essaie de résoudre**

**5** Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

**A** $\frac{4 - 6i}{2i}$

**B** $\frac{26}{3 - 2i}$

**C** $\frac{3 - i}{2 - i}$

**D** $\frac{3 + 4i}{5 - 2i}$

**Exemple**

7 **Électricité :** Trouve l'intensité du courant électrique passant entre deux résistances placées en parallèle dans un circuit électrique fermé sachant que l'intensité du courant dans la première résistance est $5 - 3i$ Ampère et que l'intensité du courant dans la deuxième résistance est $2 + i$ Ampère (sachant que l'intensité totale du courant électrique est égale à la somme des intensités des courants passant par les deux résistances)

**Solution**

$\because$ Intensité totale du courant = somme des intensités des courants passant par les deux résistances.

$\therefore$ $= (5 - 3i) + (2 + i)$

$= (5 + 2) + (-3 + 1)\,i$

$= 7 - 2i$ Ampère

**Essaie de résoudre**

6 Si l'intensité totale du courant électrique passant entre deux résistances placées en parallèle dans un circuit électrique fermé est égale à $6 + 4\,i$ Ampère et si l'intensité du courant passant dans l'une des deux résistances est égale à $\frac{17}{4 - i}$, trouver l'intensité du courant passant dans l'autre résistance.

## Test de compréhension

1 **Réflexion critique :** Mets sous la forme la plus simple : $(1 - i)^{10}$.

# Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

# 1 - 3




Tu as déjà étudié la résolution d'une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$, Tu sais donc que cette équation peut avoir deux solutions ou une solution unique ou ne peut avoir aucune solution. Peux-tu trouver le nombre de racines (solutions) d'une équation du second degré sans la résoudre ?

### A apprendre

- Comment déterminer les racines d'une équation du second degré à une inconnue.




## Le discriminant

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels : $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Chacune des deux racines contient l'expression $\sqrt{b^2 - 4ac}$ .

L'expression $b^2 - 4ac$ est appelée le discriminant de l'équation du second degré. Le calcul du discriminant permet de déterminer la nature des deux racines de l'équation.

### Expressions de base

- Racine
- Discriminant




**1 Détermine la nature des racines de chacune des équations suivantes :**

**A** $5x^2 + x - 7 = 0$ **B** $x^2 - 2x + 1 = 0$

**C** $-x^2 + 5x - 30 = 0$

**Solution**

Pour déterminer la nature des deux racines :

**A** Dans l'équation $5x^2 + x - 7 = 0$ $a = 5$ , $b = 1$ , $c = -7$

Le discriminant $= b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times 5 \times (-7) = 141$

$\because$ Puisque le discriminant est positif, l'équation a deux racines réelles différentes.

**B** Dans l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ $a = 1$ , $b = -2$ , $c = 1$

Le discriminant $= b^2 - 4ac$

$= 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

$\because$ Puisque le discriminant est nul, l'équation a deux racines réelles égales.

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

**C** Dans l'équation $-x^2 + 5x - 30 = 0$ $a = -1$ , $b = 5$ , $c = -30$

Le discriminant $= b^2 - ac$

$= 25 - 4 \times (-1) \times (-30) = -95$

∵ Puisque le discriminant est négatif, l'équation a deux racines complexes.

**Remarque que :**

| Le discriminant | Nombre de racines et leurs natures | Allure de la courbe |
|---|---|---|
| $b^2 - 4ac > 0$ | **Deux racines réelles différentes** | |
| $b^2 - 4ac = 0$ | **Une racine réelle double** | |
| $b^2 - 4ac < 0$ | **Deux racines complexes** | |

## Essaie de résoudre

**1** Détermine le nombre de racines de chacune des équations suivantes en précisant leurs natures :

**A** $6x^2 = 19x - 15$

**B** $12x - 4x^2 = 9$

**C** $x(x - 2) = 5$

**D** $x(x + 5) = 2(x - 7)$

**Exemple**

**2** Démontre que les racines de l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$ sont complexes, puis utilise la formule générale pour trouver ces deux racines.

**Solution**

Dans l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$ $a = 2, b = -3, c = 2$

∵ Le discriminant $= b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$

∵ Puisque le discriminant est négatif , **l'équation a deux racines complexes**

**La formule générale est** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$$

**Les deux racines de l'équation sont :** $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$, $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$

**Réflexion critique :** Dans l'ensemble des nombres complexes, les deux racines d'une équation du second degré sont-elles nécessairement deux nombres conjugués ? Justifie ta réponse par des exemples.

### Essaie de résoudre

**2** Démontre que les deux racines de l'équation $7x^2 - 11x + 5 = 0$, sont complexes, puis utilise la formule générale pour trouver ces deux racines.

### Exemple

**3** Si les racines de l'équation $x^2 + 2(k - 1)x + 9 = 0$ sont égales, trouve la valeur de k, puis vérifie le résultat.

**Solution**

$b^2 - 4ac = 0$

$4(k-1)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

$4k^2 - 8k - 32 = 0$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

$(k-4)(k+2) = 0$

$k = 4$ ou $k = -2$

**Vérification :** si $k = 4$

**L'équation est :** $x^2 + 6x + 9 = 0$

Les racines de cette équation sont égales. Ce sont : -3 et -3

**Vérification :** Si $k = -2$

**L'équation est :** $x^2 - 6x + 9 = 0$

Les racines de cette équation sont égales. Ce sont 3 et 3.

### Essaie de résoudre

**3** Si les racines de l'équation $x^2 - 2kx + 7k - 6x + 9 = 0$ sont égales, trouve les valeurs réelles de k, puis trouve les deux racines.

### Test de compréhension

**1** **Lien avec la santé :** L'Organisation Mondiale de la Santé fait beaucoup d'efforts pour sensibiliser aux dangers de l'hépatite. Une étude dans l'un des pays faite durant plusieurs années, montre les résultats indiqués dans le tableau ci-contre. L'équation $y = -2{,}5n^2 - 7{,}5n + 945$ représente le nombre de contaminés où n est le nombre d'années après l'an 2005.

| Année | Nombre de contaminés pour chaque 10000 personnes |
|---|---|
| 2005 | 945 |
| 2007 | 920 |
| 2010 | 845 |
| 2014 | ............ |
| 2020 | ............ |

**A** Calcule le nombre de contaminés en 2014 et en 2020

**B** Utilise la formule générale pour trouver la valeur de n si y = 495

**C** Quand est-ce que le nombre de contaminés est égal à zéro ? Est-ce possible ? Justifie ta réponse.

**D** Utilise Internet pour chercher les causes de l'hépatite, les méthodes de prévention et les méthodes de soin.




# Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

### A apprendre

- Comment calculer la somme des deux racines d'une équation du second degré.
- Comment calculer le produit des deux racines d'une équation du second degré.
- Trouver une équation du second degré à partir d'une autre du second degré.

### Expressions de base

- Somme des deux racines
- Produit des deux racines

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique




On sait que les racines de l'équation $4x^2 - 8x + 3 = 0$ sont $\frac{1}{2}$ , $\frac{3}{2}$.

**La somme des racines =** $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

**Le produit des deux racines =** $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Y a-t-il une relation entre la somme des racines d'une équation et les coefficients de ses termes ?

Y a-t-il une relation entre le produit des racines d'une équation et les coefficients de ses termes ?




## La somme et le produit des deux racines

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont :

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = L$ et $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = M$, alors :

$L + M = \frac{-b}{a}$ et $L\,M = \frac{c}{a}$ (à démontrer)

**Expression orale :** Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ , trouve la valeur de $L + M$ et $L\,M$ dans chacun des cas suivants :

**A** si $a = 1$ **B** si $b = a$ **C** si $a = c$

**Exemple**

**1** Sans résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 12 = 0$ , trouve la somme et le produit de ses racines.

**Solution**

$a = 2$ , $b = 5$ , $c = -12$

**La somme des racines** $= \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

**Le produit des racines** $= \frac{c}{a} = \frac{-12}{2} = -6$

### Essaie de résoudre

1. Sans résoudre l'équation, trouve la somme et le produit de ses racines dans chacun des cas suivants :

A $2x^2 + x - 6 = 0$ B $3x^2 = 23x - 30$ C $(2x - 3)(x + 2) = 0$

### Exemple

2. Si le produit des racines de l'équation $2x^2 - 3x + k = 0$ est égal à 1, trouve la valeur de k, puis résous l'équation dans l'ensemble des nombres complexes.

**Solution**

Le produit des racines $= \frac{c}{a}$ $\therefore \frac{k}{2} = 1$ $\therefore k = 2$

$a = 2, b = -3, c = 2$

La formule générale est : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\, i}{4}$$

L'ensemble solution est $\{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i \; ; \; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\}$

### Essaie de résoudre

2. Si le produit des racines de l'équation $3x^2 + 10x - c = 0$ est égal à $\frac{-8}{3}$, trouve la valeur de c, puis résous l'équation.
3. Si la somme des racines de l'équation $2x^2 + bx - 5 = 0$ est égale à $-\frac{3}{2}$, trouve la valeur de b, puis résous l'équation.

### Exemple

3. Si $(1 + i)$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 2x + k = 0$ où $k \in R^*$ trouve :

A l'autre racine B la valeur de k.

**Solution**

$a = 1$ , $b = -2$ , $c = k$

A $\because$ $1 + i$ est l'une des racines de l'équation

$\therefore$ l'autre racine $= 1 - i$ car les deux racines sont conjuguées et leur somme est = 2

B $\because$ Le produit des racines = k

$\therefore (1 + i)(1 - i) = k$

$\therefore 1 + 1 = k$

$\therefore k = 2$

### Essaie de résoudre

**4** Si (2 + i) est l'une des racines de l'équation $x^2 - 4x + h = 0$ , trouve

**A** l'autre racine. **B** la valeur de h.



## A apprendre — Former une équation du second degré en connaissant ses deux racines

**Soient L et M les racines de l'équation :** $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

**En divisant les deux membres de l'équation par a :** $\therefore x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$

**D'où** $x^2 - (\frac{-b}{a}) x + \frac{c}{a} = 0$

$\because$ L et M sont les racines de l'équation et, $L + M = -\frac{b}{a}$ et $LM = \frac{c}{a}$

$\therefore$ **L'équation du second degré ayant pour racines L et M est :** $x^2 - (L + M) x + LM = 0$

### Exemple

**4** Forme l'équation du second degré dont les racines sont 4 et -3 .

**Solution**

**Soient les deux racines L et M**

$\because L + M = 4 + (-3) = 1$ et $LM = 4(-3) = -12$,

$\because$ **L'équation du second degré est de la forme :** $x^2 - (L + M) x + LM = 0$

$\therefore$ **L'équation est :** $x^2 - x - 12 = 0$

### Exemple

**5** Dans chacun des cas suivants, forme l'équation du second degré dont les racines sont : $\frac{-2+2i}{1+i}$ et $\frac{-2-4i}{2-i}$

**Solution**

Soient les deux racines L et M

$L = \frac{-2+2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{4i}{2} = 2i$

$M = \frac{-2-4i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{-10i}{5} = -2i$

$L + M = 2i - 2i = 0$

, $LM = 2i \times (-2i) = -4i^2 = 4$

$\because$ L'équation du second degré est de la forme : $x^2 + (L + M)x + LM = 0$

$\therefore$ L'équation est $x^2 + 4 = 0$

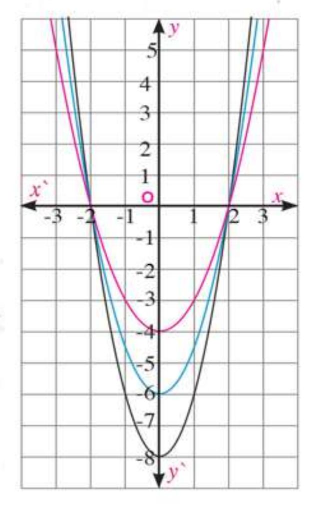
### Essaie de résoudre

**5** Dans chacun des cas suivants, forme l'équation du second degré dont les racines sont :

**A** 3 et -5 **B** -9 i et 9 i **C** $\frac{3}{i}$ et $\frac{3+3i}{1-i}$

**Réflexion critique :** La figure ci-contre, représente les courbes de plusieurs fonctions du second degré passant par les deux points (-2; 0 ) et (2; 0).

Trouve l'expression algébrique de chaque fonction.



## Former une équation du second degré connaissant une autre du second degré :

**Exemple**

(6) Si L et M sont les racines de l'équation $2x^2 - 3x - 1 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont $L^2$ et $M^2$.

**Solution**

**Dans l'équation donnée, a = 2, b = - 3 et c = -1:** $L + M = -(\frac{-3}{2}) = \frac{3}{2}$ et $LM = (-\frac{1}{2})$

**Dans l'équation demandée, on sait que** $L + M = \frac{3}{2}$ **et** $LM = -\frac{1}{2}$

**En utilisant la formule** $L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2\,LM$

$\therefore L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2\,LM \quad = (\frac{3}{2})^2 - 2 \times (-\frac{1}{2})$

$= \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4}$

$\because L^2M^2 \quad = (LM)^2$

$\therefore L^2M^2 \quad = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

**Remarque que**

$L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2L\,M$

L'équation demandée est $x^2$ – (somme des racines) $x$ + produit des racines = 0

$x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ **En multipliant les deux membres de l'équation par 4**

$\therefore$ **L'équation demandée est :** $4x^2 - 13x + 4 = 0$

**Essaie de résoudre**

(6) Dans l'équation précédente $2x^2 - 3x - 1 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont :

(A) $\frac{1}{L}, \frac{1}{M}$ (B) $\frac{L}{M}, \frac{M}{L}$ (C) $L + M, LM$

## Test de compréhension

(1) Dans chacun des cas suivants, forme une équation du second degré dont les racines sont :

(A) $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ (B) $5\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$ (C) $3 + \sqrt{2}\,i$ et $3 - \sqrt{2}\,i$

(2) Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 + 3x - 5 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont $L^2$ et $M^2$.

# 1 - 5 Signe d'une fonction

### A apprendre

- Étude du signe d'une fonction : constante - du premier degré - du second degré

### Expressions de base

- Signe d'une fonction
- Fonction constante
- Fonction affine (du premier degré)
- Fonction du second degré

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique




Tu as déjà étudié la représentation graphique d'une fonction du premier degré et d'une fonction du second degré. Tu as identifié l'allure de leurs courbes représentatives. Peux-tu trouver le signe de chacune de ses fonctions ?

Détermine le signe d'une fonction consiste à déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

f(x) est **positive** c'est-à-dire $f(x) > 0$

f(x) est **négative** c'est-à-dire $f(x) < 0$

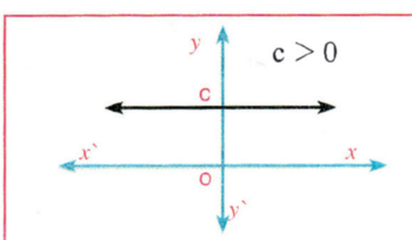
f(x) est **nulle** c'est-à-dire $f(x) = 0$



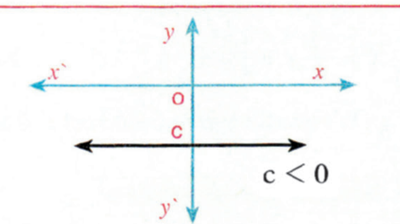

## (1) Signe d'une fonction constante

Le signe d'une fonction constante $f$ telle que $f(x) = c$ $(c \neq 0)$ est le même signe que celui de c pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La figure suivante montre le signe de la fonction $f$.




La fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$




La fonction est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$




**1** Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

**A** f(x) = 5 **B** f(x) = -7

**Solution**

**A** $\because f(x) > 0$ $\therefore$ la fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$

**B** $\because f(x) < 0$ $\therefore$ la fonction est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$



## Essaie de résoudre

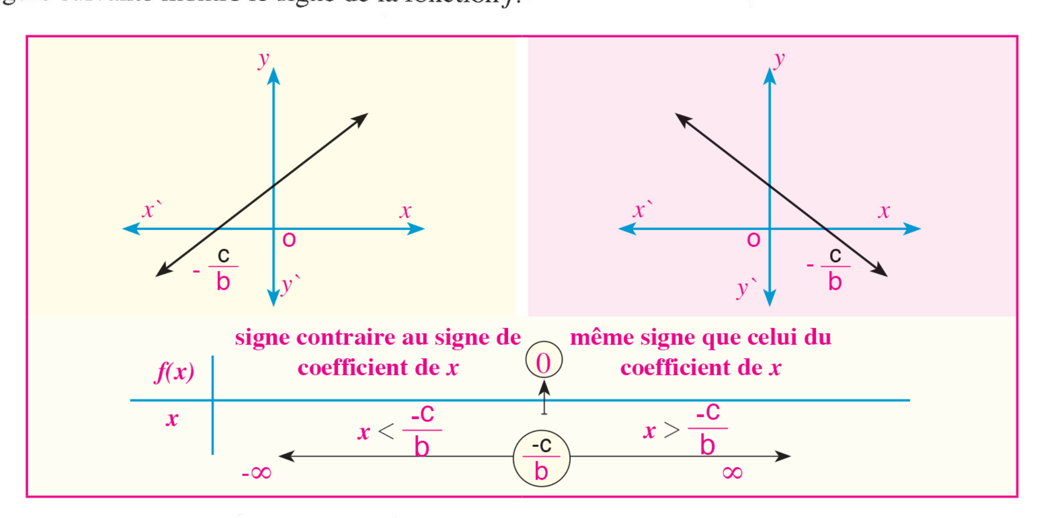
1. Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

**A** $f(x) = -\frac{2}{3}$ **B** $f(x) = \frac{5}{2}$

## (2) Signe d'une fonction du premier degré (fonction affine) :

L'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = bx + c$ , $b \neq 0$ , $x = -\frac{c}{b}$. si $f(x) = 0$

La figure suivante montre le signe de la fonction $f$.

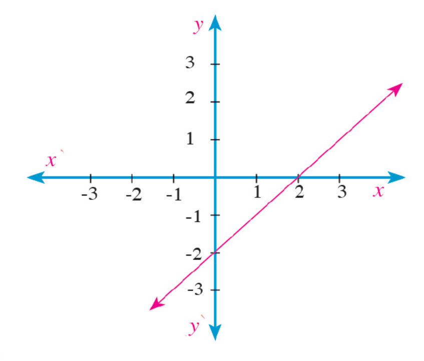



**Exemple**

2. Détermine le signe de la fonction $f(x) = x - 2$ en illustrant la réponse graphiquement :



**Solution**




L'expression algébrique de la fonction : $f(x) = x - 2$

Le graphique de la fonction :

Pour tracer la courbe

Si $f(x) = 0$ , alors $x = 2$

Si $x = 0$ , alors $f(x) = -2$

**Du graphique, on trouve que :**

- la fonction est positive si $x > 2$
- la fonction est nulle si $x = 2$
- la fonction est négative si $x < 2$

## Essaie de résoudre

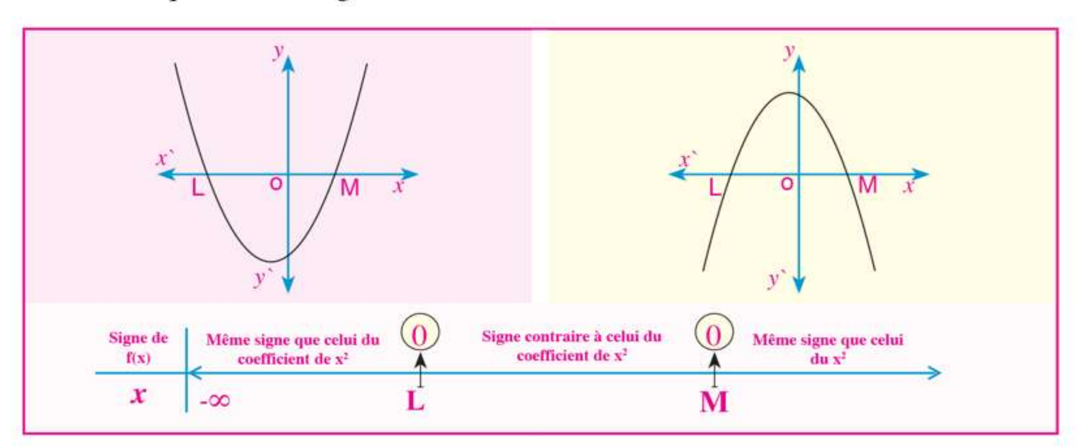
2. Détermine le signe de la fonction $f(x) = -2x - 4$ en illustrant la réponse graphiquement.

## (3) Signe d'une fonction du second degré :

Pour déterminer le signe d'une fonction $f$ du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$

**on calcule le discriminant de la fonction $ax^2 + bx + c = 0$ :**

**(1)** Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation a deux racines réelles L et M . En supposant que L < M , le signe de la fonction est indiqué dans les figures suivantes :




**Exemple**

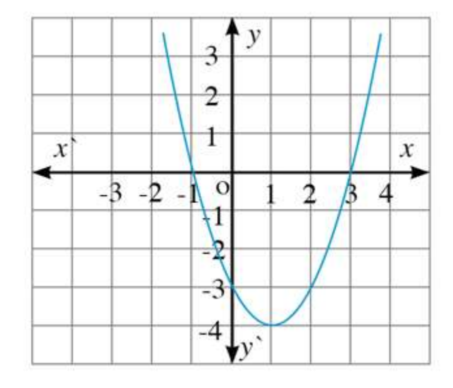
**3** Représente graphiquement la fonction $f$ telle que $f(x) = x^2 - 2x - 3$, puis détermine son signe.

**Solution**

**En factorisant l'équation :** $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

**Les racines de l'équation sont :** -1 et 3



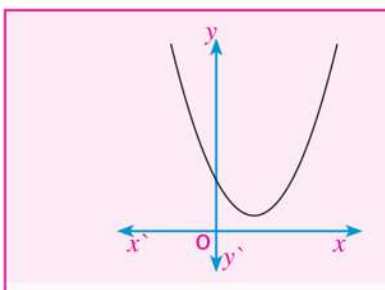

**Du graphique, on trouve que :**

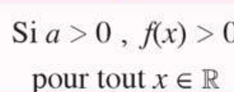
- $f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R} - [-1, 3]$
- $f(x) < 0$ si $x \in ]-1, 3[$
- $f(x) = 0$ si $x \in \{-1, 3\}$

**Essaie de résoudre**

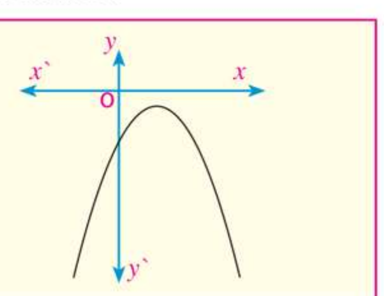
**3** Représente graphiquement la fonction $f$ telle que $f(x) = x^2 - x + 6$, puis détermine son signe.

**(2)** Si $b^2 - 4ac < 0$ , l'équation n'a pas de racines réelles. Dans ce cas, la fonction $f$ a le même signe que celui du coefficient de $x^2$, comme l'indique la figure suivante :



Si $a > 0$ , $f(x) > 0$
pour tout $x \in \mathbb{R}$




Si $a < 0$ , $f(x) < 0$
pour tout $x \in \mathbb{R}$

**Exemple**

**4** Représente graphiquement la fonction $f$ telle que $f(x) = x^2 - 4x + 5$, puis détermine son signe.

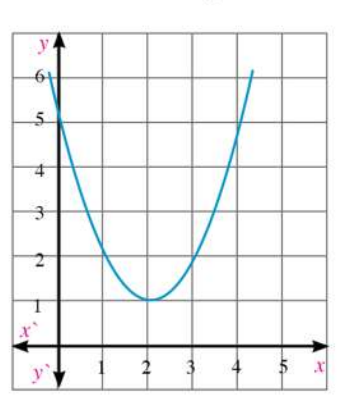
**Solution**

Le discriminant est $(b^2 - 4\,ac) = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 16 - 20 = -4 < 0$

la fonction $x^2 - 4x + 5 = 0$, n'a pas de racines réelles

la fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car le coefficient de $x^2 > 0$)



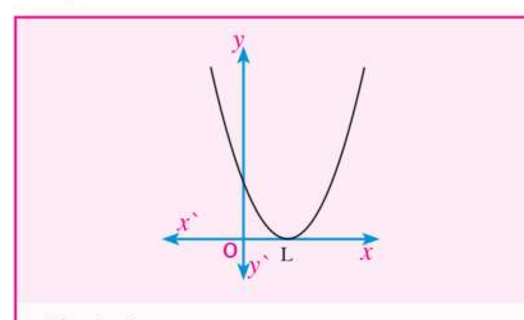

**Essaie de résoudre**

**4** Représente graphiquement la fonction $f$, telle que $f(x) = -x^2 - 2x - 4$, puis détermine son signe.

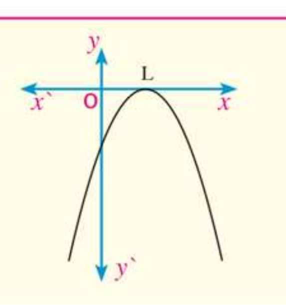
**(3)** Si $b^2 - 4a\,c = 0$ l'équation a une racine double. Soit L cette racine. Dans ce cas, le signe de la fonction est comme suit :

- Si $x \neq L$ la fonction a le même signe que celui de a.
- Si $f(x) = 0$ si $x = L$

La figure suivante illustre ce cas :



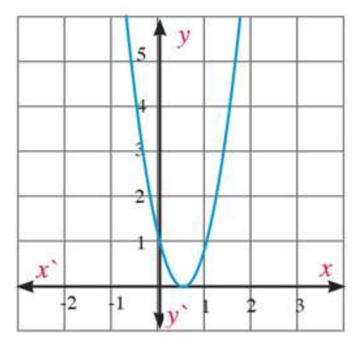

Si $a > 0$
$f(x) > 0 \quad x \neq L,$
$f(x) = 0$ pour $x = L$




Si $a < 0$
$f(x) < 0 \quad x \neq L,$
$f(x) = 0$ pour $x = L$

**Exemple**

**5** Représente graphiquement la fonction $f$ telle que $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, puis détermine son signe.




**Solution**

Le discriminant est $(b^2 - 4ac) = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1$
$= 16 - 16 = 0$

la fonction $4x^2 - 4x + 1 = 0$ a une racine double.

**En factorisant :** $(2x - 1)^2 = 0$

**Si :** $2x - 1 = 0$, alors $x = \frac{1}{2}$

$f(x) > 0$ pour $x \neq \frac{1}{2}$ , $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$

## Essaie de résoudre

**5** Représente graphiquement la fonction $f$, telle que $f(x) = -4x^2 - 12x - 9$, puis détermine son signe

**Exemple**

**6** Démontre que pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$, les racines de l'équation $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ sont réelles différentes.

**Solution**

Le discriminant $(b^2 - 4ac) = (-k)^2 - 4 \times 2 \times (k - 3) = k^2 - 8k + 24$

**Les deux racines sont réelles différentes si le discriminant est positif.**

**On étudie le signe de la fonction** $y = k^2 - 8k + 24$

**Le discriminant de l'équation $k^2 - 8k + 24 = 0$ est :**

$(-8)^2 - 4 \times 1 \times 24 = 64 - 96 = -32 < 0$

Donc l'équation $k^2 - 8k + 24 = 0$ n'a pas de racines réelles.

$\therefore$ **La fonction** $y = k^2 - 8k + 24$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ (Pourquoi ?)

**Donc le discriminant de l'équation** $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ **Les racines de l'équation** $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ sont réelles différentes.

## Test de compréhension

**1** Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

**A** $f(x) = 2x - 3$ **B** $f(x) = 4 - x$ **C** $f(x) = x^2 - 4$

**D** $f(x) = 1 - x^2$ **E** $f(x) = 4 + 4x + x^2$ **F** $f(x) = 3x - 2x^2 + 4$

# Inéquation du second degré

# 1 - 6

## L'inéquation du second degré à une inconnue :



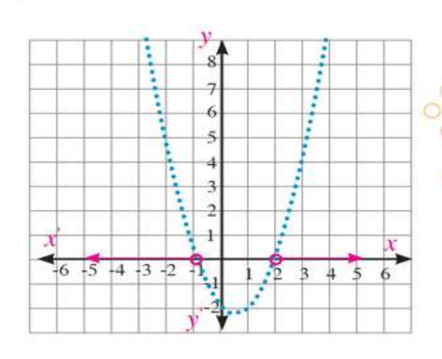

Tu as déjà étudié l'inéquation du premier degré à une inconnue. Tu sais que résoudre cette inéquation consiste à trouver toutes les valeurs de la variable qui vérifient l'inéquation. L'ensemble solution s'écrit sous la forme d'un intervalle. Peux-tu résoudre une inéquation du second degré à une inconnue ?

**Remarque que :**

$x^2 - x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré tandis que $f(x) = x^2 - x - 2$ est la fonction du second degré correspondante à cette inéquation.

**La figure ci-contre montre que :**

- ➢ L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - x - 2 > 0$ est $]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$
- ➢ L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - x - 2 < 0$ est $]-1, 2[$




### A apprendre

- Résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue

### Expressions de base

- Inéquation




## Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

**Exemple**

(1) Résous l'inéquation : $x^2 - 5x - 6 > 0$

**Solution**

Pour résoudre l'inéquation, on suit les étapes suivantes :

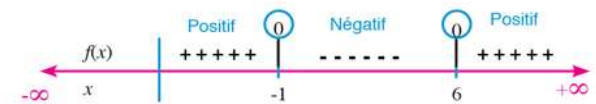
**Étape (1) :** On écrit la fonction du second degré correspondante à l'inéquation. La fonction est

$f(x) = x^2 - 5x - 6$

**Étape (2):** On étudie le signe de la fonction $f$ telle que $f(x) = x^2 - 5x - 6$, puis on l'illustre sur la droite numérique en posant $f(x) = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$ $\therefore\ (x - 6)(x + 1) = 0$

$x = 6$ ou $x = -1$




**Étape (3):** On détermine les intervalles qui vérifient l'inéquation $x^2 - 5x - 6 > 0$




Donc l'ensemble solution est : ]-∞ ,-1[ ∪ ]2 , + ∞[

## Essaie de résoudre

**1** Résous chacune des inéquations suivantes :

**A** $x^2 + 2x - 8 > 0$ **B** $x^2 + x + 12 > 0$

## Exemple

**2** Résous l'inéquation : $(x + 3)^2 \leqslant 10 - 3(x + 3)$.

### Solution

★ $\because\ (x + 3)^2 \leqslant 10 - 3(x + 3)$

$\therefore\ x^2 + 6x + 9 \leqslant 10 - 3x - 9$

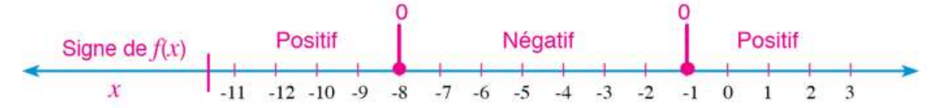
$\therefore\ x^2 + 9x + 8 \leqslant 0$

**L'équation correspondante est :** $x^2 + 9x + 8 = 0$

**En factorisant :** $(x + 8)(x + 1) = 0$

**L'ensemble solution de l'équation est :** {- 8, - 1}

★ La droite numérique suivante illustre le signe de la fonction $f(x) = x^2 + 9x + 8$




Donc l'ensemble solution de l'inéquation est : [- 8, - 1]

### Essaie de résoudre

**2** Résous chacune des inéquations suivantes :

**A** $5x^2 + 12x \geqslant 44$

**B** $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 10 \geqslant 0$

## Test de compréhension

**1** Quelle est la différence entre une équation du second degré à une inconnue et une inéquation du second degré à une inconnue ?

**2** Quelle est la relation entre la recherche du signe d'une fonction du second degré à une inconnue et la résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue ?

**3** **Déceler l'erreur :** Trouve l'ensemble solution de l'inéquation $(x + 1)^2 < 4(2x - 1)^2$

**La solution de Youssef**

$\because (x + 1)^2 < 4(2x - 1)^2$

$\therefore x + 1 < 2(2x - 1)$ en calculant les racines des deux membres

$\therefore -4x + x + 2 + 1 < 0$

$\therefore -3x + 3 < 0$

L'équation correspondante à l'inégalité est :

$-3x + 3 = 0$

L'ensemble solution est $\{1\}$

$-\infty$ + + + 0 - - - $f(x)$ $+\infty$ ; 1 ; $x$

★ Recherche du signe de la fonction $f$ telle que $f(x) = -3x + 3$

L'ensemble solution de l'inéquation $]1 , +\infty[$

**La solution de Nour**

$\because (x + 1)^2 < 4(2x - 1)^2$

$\therefore x^2 + 2x + 1 < 16x^2 - 16x + 4$

$\therefore 15x^2 - 18x + 3 > 0$

L'équation correspondante à l'inégalité est :

$\therefore 3(5x - 1)(x - 1) = 0$

L'ensemble solution est $\{1, \frac{1}{5}\}$

$-\infty$ + + + 0 - - - - 0 + + $f(x)$ $+\infty$ ; $\frac{1}{5}$ ; 1 ; $x$

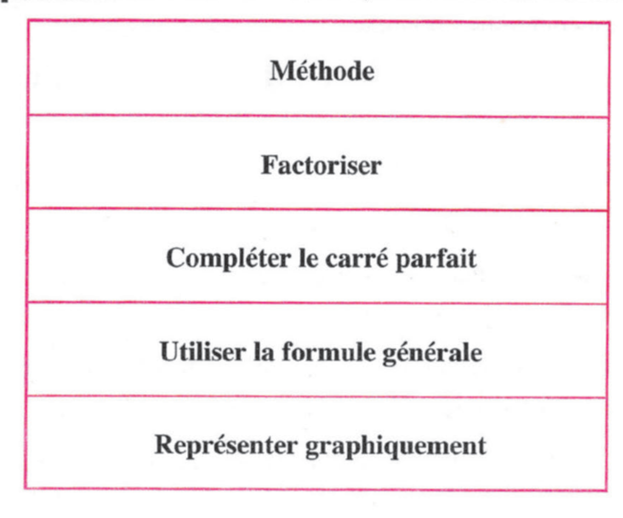
★ Recherche du signe de la fonction $f$ telle que $f(x) = 15x^2 - 18x + 3$

L'ensemble solution de l'inéquation

$\mathbb{R} - [\frac{1}{5}, 1]$

# Résumé de l'unité

## 1 Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels et $a \neq 0$.



| Méthode |
|---|
| Factoriser |
| Compléter le carré parfait |
| Utiliser la formule générale |
| Représenter graphiquement |

## 2 Détermination de la nature des racines de l'équation du second degré :

($b^2 - 4ac$) est appelé le discriminant de l'équation du second degré. Ce discriminant indique la nature et le nombre de racines de l'équation comme suit :

- ★ Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation admet deux racines réelles différentes
- ★ Si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation admet une racine réelle double .
- ★ Si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation admet deux racines complexes.

## 3 Le nombre complexe :

Tout nombre qu'on peut écrire sous la forme $a + b\,i$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels et $i^2 = -1$ est un nombre complexe. bi est la partie imaginaire du nombre. Le tableau suivant montre les puissances entières de i où $n \in z$:

| $i^{4n+1}$ | $i^{4n+2}$ | $i^{4n+3}$ | $i^{4n}$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $-i$ | 1 |

**Égalité de deux nombres complexes :** Si $a + b\,i = c + d\,i$ , alors a = c et b = d et réciproquement

**Propriétés des opérations :** On peut utiliser les propriétés de la commutativité, de l'associativité et de la distributivité pour l'addition et la multiplication des nombres complexes. Pour additionner et soustraire les nombres complexes, on additionne les parties réelles pour trouver la partie réelle du résultat et les parties imaginaires pour trouver la partie imaginaire du résultat.

**Deux nombres conjuguées :** Les deux nombres $a + b\,i$ et $a - b\,i$ sont appelés deux nombres conjugués. La somme de deux nombres conjugués est un nombre réel et leur produit est aussi un nombre réel.

## 4 Somme et produit des racines d'une équation du second degré :

Si L et M sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, alors L et M : donc $L + M = \frac{-b}{A}$ et $LM = \frac{c}{a}$

## 5 Former une équation du second degré connaissant ses racines :

Si L et M sont les racines d'une équation du second degré , alors l'équation peut s'écrire sous la forme :

★ $(x - L)(x - M) = 0$

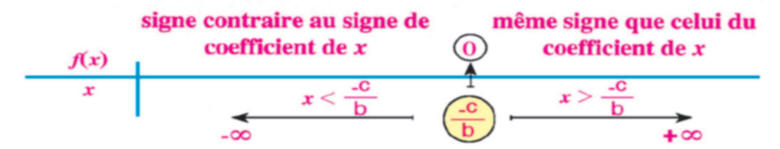
★ Si $L + M = -\frac{b}{a}$ et $LM = \frac{c}{a}$, alors l'équation est $x^2 - (L + M)x + LM = 0$

## 6 Recherche du signe d'une fonction :

★ Le signe d'une fonction constante $f$ telle que $f(x) = c$ $(c \neq 0)$ est le même signe que celui de c pour tout $x \in \mathbb{R}$.

★ L'expression algébrique de la fonction $f$ est $f(x) = bx + c$ où $b \neq 0$

Si $f(x) = 0$, alors $x = -\frac{c}{b}$. La figure suivante montre le signe de la fonction $f$ :




★ Pour déterminer le signe d'une fonction $f$, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ on calcule le discriminant.

★ Si $b^2 - 4ac > 0$, le signe de la fonction $f$ est déterminé selon la figure suivante :




★ Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation a une racine double. Soit L cette racine. Dans ce cas, le signe de la fonction est comme suit :

Si $x \neq L$ , la fonction a le même signe que celui de a.

Si $x = L$ , $f(x) = 0$

★ Si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation n'a pas de racines réelles. Dans ce cas, la fonction $f$ a le même signe que celui du coefficient de $x^2$.

## 7 Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue :

Pour résoudre une inéquation du second degré, on suit les étapes suivantes :

**1-** On écrit la fonction du second degré $y = f(x)$ correspondante à l'inéquation.

**2-** On étudie le signe de la fonction f, puis on l'illustre sur la droite numérique.

**3-** On détermine l'ensemble solution suivant les intervalles qui le vérifient




## Objectifs de l'unité

**Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :**

- Se rappeler de tout ce qu'il a déjà étudié dans le cycle préparatoire concernant la similitude.
- Identifier la similitude de deux polygones.
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables »
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables ».
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal à …… ».
- Identifier et démontrer le corollaire d'énoncé « Deux polygones semblables peuvent être partagés en …… ».
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Le rapport entre les aires de deux polygones semblables est égal à …… ».
- Identifier et démontrer le corollaire d'énoncé « Deux droites contenant respectivement deux cordes d'un cercle se coupent en un point …… », sa réciproque et ses corollaires.

## Expressions de base

- Rapport
- Proportion
- Mesure d'angle
- Longueur
- Aire
- Produit en croix
- Extrême
- Moyen
- Polygones semblables
- Triangles semblables
- Côtés correspondants
- Angles superposables
- Polygone régulier
- Quadrilatère
- Pentagone
- Axiome
- Périmètre
- Aire d'un polygone
- Corde
- Sécante
- Tangente
- Diamètre
- Tangente commune extérieure
- Tangente commune intérieure
- Cercles concentriques
- Rapport de similitude



## Leçons de l'unité

**Leçon (2 - 1):** Similitude des polygones

**Leçon (2 - 2):** Similitude des triangles

**Leçon (2 - 3):** Relation entre les aires de deux polygones semblables

**Leçon (2 - 4):** Application de la similitude dans le cercle

## Matériel utilisé

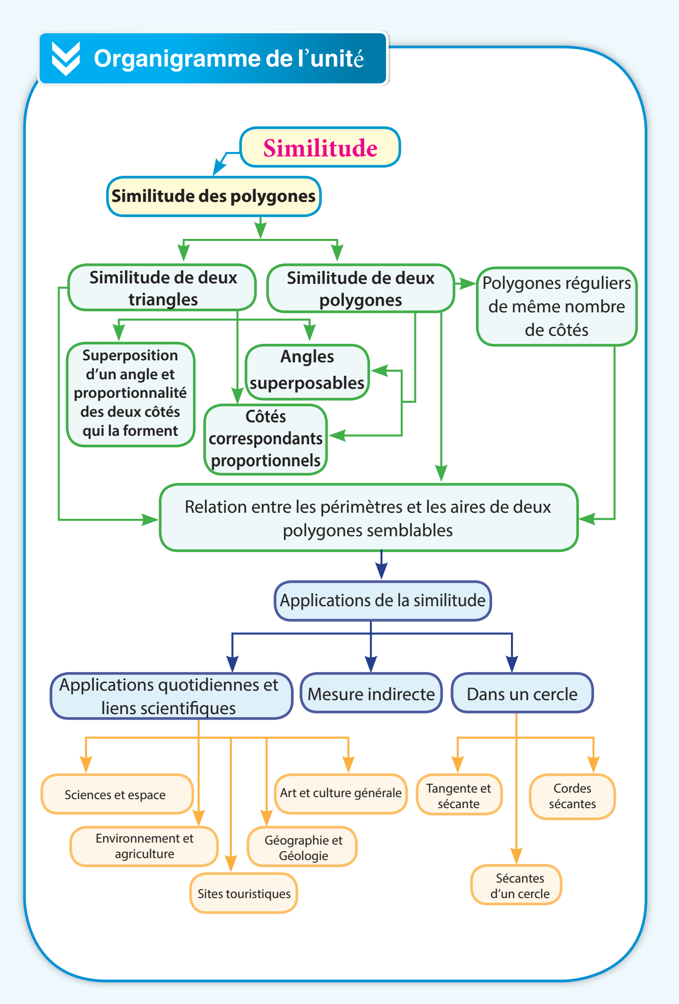
Ordinateur – Vidéo projecteur – Logiciels – Papiers quadrillés – Miroir – Instruments de mesure – Calculatrice

## Historique

Pour construire un bâtiment sur un terrain, nous avons besoin de faire un plan de ce bâtiment et comme il est évident qu'on ne peut pas exécuter ce plan sur un papier qui a la dimension du terrain, on a recours à un modèle réduit de la construction en utilisant une échelle et des mesures d'angles analogues à leurs correspondants en réalité.

Si tu observes la figure en haut de la page, tu remarques que la nature contient des modèles qui se reproduisent de différentes grandeurs, par exemple : les feuilles d'arbres, le chou–fleur, les sinuosités du bord de la mer. L'observation de ces motifs récurrents a provoqué l'apparition d'une nouvelle géométrie depuis 40 ans environ. Cette géométrie qu'on appelle géométrie fractale et que tu étudieras plus tard, s'intéresse à l'étude des figures symétriques qui se reproduisent irrégulièrement.

## Organigramme de l'unité



# 2 - 1

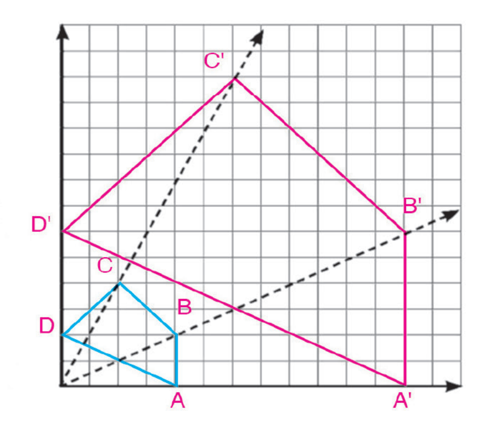
# Similitude des polygones

### A apprendre

- Notion de la similitude.
- Similitude des polygones.
- Échelle.
- Rectangle d'or et rapport d'or.




La figure ci-contre illustre un polygone ABCD et son image A'B'C'D' par une transformation géométrique.




**A** Compare les mesures des angles correspondants :
$\angle A$, $\angle A'$ – $\angle B$, $\angle B'$
$\angle C$, $\angle C'$ – $\angle D$, $\angle D'$
Que remarques-tu ?

**B** Calcule le rapport entre les longueurs des côtés correspondants $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$, $\frac{C'D'}{CD}$ et $\frac{D'A'}{DA}$. Que remarques-tu ?

### Expressions de base

- Polygones semblables
- Triangles semblables
- Côtés correspondants
- Angles superposables
- Polygone régulier
- Quadrilatère
- Pentagone
- Rapport de similitude

Les polygones ayant la même forme, sont appelés des polygones semblables même si leurs côtés correspondants ne sont pas de même longueur.

## Polygones semblables




**Deux polygones ayant le même nombre de côtés sont semblables si leurs angles correspondants sont superposables et leurs côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.**

**Remarque que :**

**1-** Dans la figure précédente, on a :

**A** **les angles correspondants sont superposables :**

$\angle A' \equiv \angle A$ , $\angle B' \equiv \angle B$
$\angle C' \equiv \angle C$ , $\angle D' \equiv \angle D$

**B** **les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles :**

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

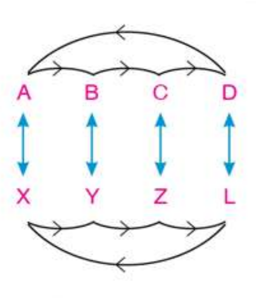
C'est pour cela qu'on peut dire que les deux figures ABCD et A'B'C'D' sont semblables.

**2-** On utilise le symbole (~) pour exprimer la similitude de deux polygones et on écrit leurs noms en respectant l'ordre des sommets correspondants pour faciliter la recherche des côtés correspondants.

### Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéo projecteur
- Logiciels
- Papiers quadrillés
- Instruments de mesure
- Calculatrice

Si polygone ABCD ~ polygone XYZL , alors :




**A** $\angle A \equiv \angle X$ , $\angle B \equiv \angle Y$ , $\angle C \equiv \angle Z$ , $\angle D \equiv \angle L$

**B** $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZL} = \frac{DA}{LX}$ = K (rapport de similitude) où $K \neq 0$

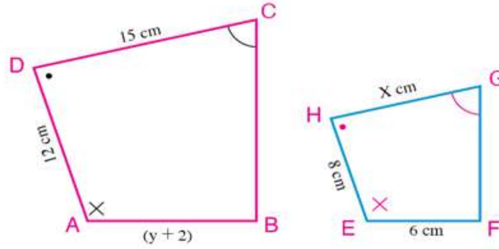
Dans ce cas, le rapport de similitude du polygone ABCD au polygone XYZL = K et le rapport de similitude du polygone XYZL au polygone ABCD = $\frac{1}{K}$

**Exemple**

**1** **Dans la figure ci-contre,** polygone ABCD ~ polygone EFGH.

**A** Trouve le rapport de similitude du polygone ABCD au polygone EFGH

**B** Trouve la valeur de $x$ et $y$.




**Solution**

∵ polygone ABCD ~ polygone EFGH

donc: $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$ = le rapport de similitude,

$$\frac{y+2}{6} = \frac{BC}{FG} = \frac{15}{x} = \frac{12}{8}$$

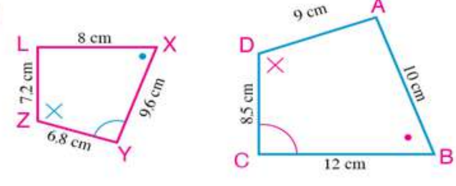
**A** Le coefficient de proportionnalité = $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

**B** $\frac{15}{x} = \frac{3}{2} \longrightarrow x = 10\text{cm}$ , $\frac{y+2}{6} = \frac{3}{2} \longrightarrow y = 7\text{cm}$

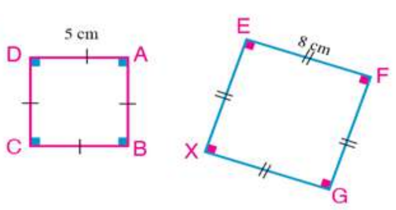
**Essaie de résoudre**

**1** Lesquelles des pairs de polygones suivants sont semblables ? Écris les polygones semblables en ordonnant les sommets correspondants puis détermine le coefficient de la similtude :

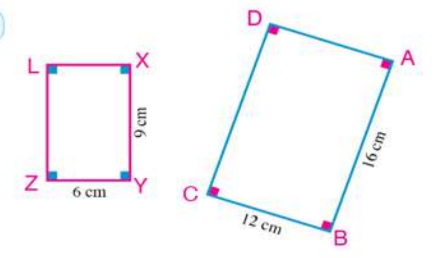
**A**



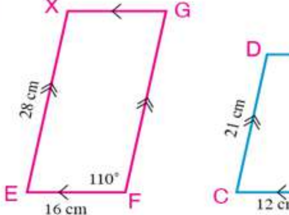

**B**

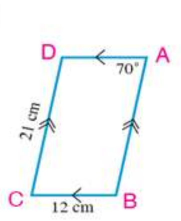



**C**




**D**



## Réfléchis

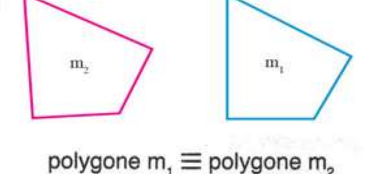
Tous les carrés sont-ils semblables ?

Tous les losanges sont-ils semblables ?

Tous les rectangles sont-ils semblables ?

Tous les parallélogrammes sont-ils semblables ?

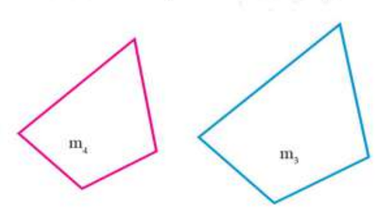
## Exeplique ta réponse




polygone $m_1 \equiv$ polygone $m_2$

**1-** Pour que deux polygones soient semblables, les deux conditions doivent être vérifiées simultanément. Une seule condition ne suffit pas.

**2-** Deux polygones superposables sont semblables car les deux conditions de la similitude sont vérifiées. Dans ce cas, le rapport de similitude est égal à 1 mais deux polygones semblables ne sont pas nécessairement superposables comme le montre la figure ci-contre.



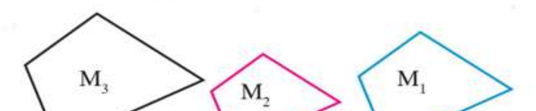

polygone $m_3 \sim$ polygone $m_4$

**3-** Deux polygones semblables à un même troisième sont semblables.

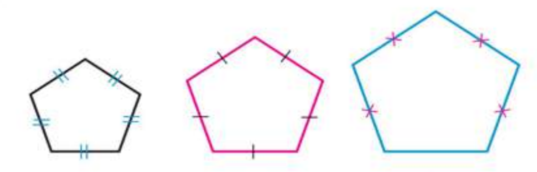
Si polygone $M_1 \sim$ polygone $M_3$

et polygone $M_2 \sim$ polygone $M_3$

alors polygone $M_1 \sim$ polygone $M_2$




**4-** Tous les polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables. Pourquoi ?

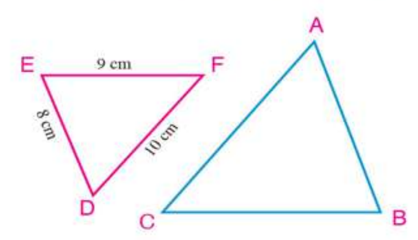


**Exemple**

**(2) Dans la figure ci-contre,** $\triangle ABC \sim \triangle DEF$,

DE = 8cm , EF = 9cm , FD = 10cm

Si le périmètre du triangle ABC = 81 cm, calc
les longueurs des côtés du triangle ABC




**Solution**

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{AE + EF + FD} = \frac{\text{Périmètre de } \triangle ABC}{\text{Périmètre de } \triangle DEF}$ (propriété de la proportionnalité)

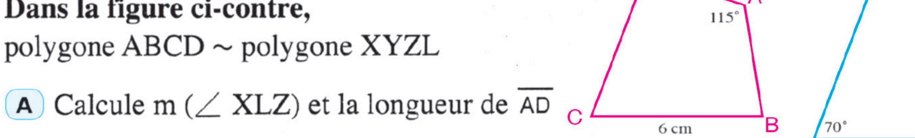
Donc $\frac{AB}{8} = \frac{BC}{9} = \frac{CA}{10} = \frac{81}{27}$

$\therefore AB = 8 \times \frac{81}{27} = 24\text{cm}$ , $BC = 9 \times 3 = 27$ , $CA = 10 \times 3 = 30\text{cm}$

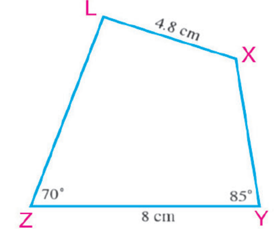
## Remarque que :

**Si** polygone $P_1 \sim$ polygone $P_2$, **alors** $\frac{\text{Périmètre du Ploygone } P_1}{\text{Périmètre du Ploygone } P_2}$ = Rapport de similitude

**Essaie de résoudre**



**2** **Dans la figure ci-contre,**
polygone ABCD ~ polygone XYZL




L, 4.8 cm, X, 70°, 85°, Z, 8 cm, Y

**A** Calcule m (∠ XLZ) et la longueur de $\overline{AD}$

**B** Si le périmètre du polygone ABCD = 19,5 cm , calcule le périmètre du polygone XYZL.

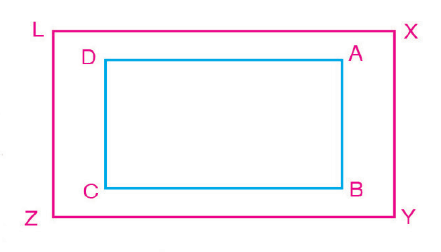
**Exemple**

**3** ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et BC = 8 cm. Trouve les dimensions d'un autre rectangle qui lui est semblable sachant que :

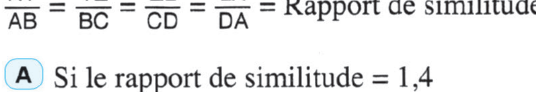
**A** le rapport de similitude = 1,4 **B** le rapport de similitude = 0,6

**Solution**

Supposons que Rectangle XYZL ~ Rectangle ABCD




Donc :



$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{ZL}{CD} = \frac{LX}{DA} = \text{Rapport de similitude}$$

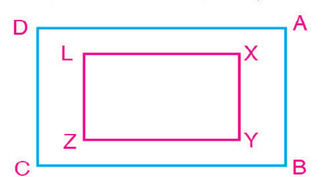
**A** Si le rapport de similitude = 1,4

$$\frac{XY}{5} = \frac{YZ}{8} = 1,4$$

∴ XY = 7cm et YZ = 8,4cm

**Remarque que:** Le rectangle XYZL est un agrandissement du rectangle ABCD

**B** Si le rapport de similitude = 0,6




$$\frac{XY}{5} = \frac{YZ}{8} = 0,6$$

∴ XY = 3cm et YZ = 4,8 cm

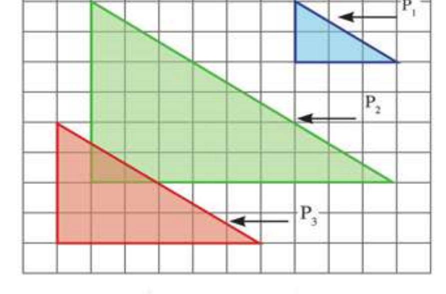
**Remarque que:** Le rectangle XYZL est une réduction du rectangle ABCD.

### Rapport de similitude de deux polygones

Soit k le rapport de similitude du polygone $P_1$ au polygone $P_2$.
Si $k > 1$ le polygone $P_1$ est un agrandissement du polygone $P_2$.
Si $0 < k < 1$ le polygone $P_1$ est une réduction du polygone $P_2$.
Si $k = 1$ le polygone $P_1$ se superpose au polygone $P_2$.

**D'une manière générale, on peut utiliser le rapport de similitude pour calculer des dimensions dans des figures semblables.**

**Exemple**




**4** **Dans la figure ci-contre,** les polygones $P_1$ et $P_3$ sont semblables et les polygones $P_2$ et $P_3$ sont semblables.

**A** Calcule le rapport de similitude du polygone $P_1$ au polygone $P_3$ et le rapport de similitude du polygone $P_2$ au polygone $P_3$.

**B** Les polygones $P_1$ et $P_2$ sont-ils semblables ? Pourquoi ? Si polygone $P_1$ ~ polygone $P_2$, trouve le rapport de similitude dans ce cas.

**Solution**

**A** Rapport de similitude du polygone $P_1$ au polygone $P_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Rapport de similitude du polygone $P_2$ au polygone $P_3 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

**B** $\because$ polygone $P_1 \sim$ polygone $P_3$ et polygone $P_2 \sim$ polygone $P_3$

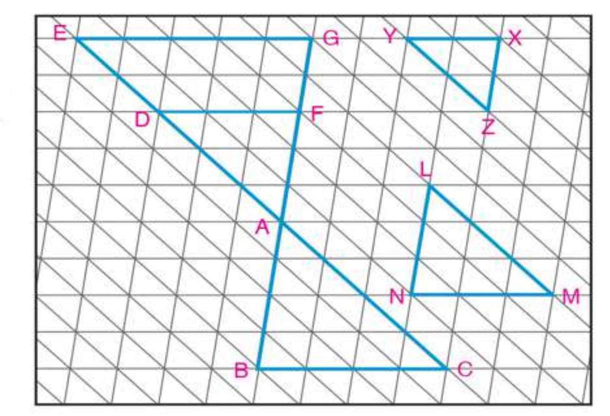
$\therefore$ polygone $P_1 \sim$ polygone $P_2$

Donc le rapport de similitude du polygone $P_1$ au polygone $P_2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

**Essaie de résoudre**

**3** Une photo rectangulaire a pour dimensions 10 cm et 15 cm. Trouve les dimensions et l'aire d'une autre photo qui lui est semblable sachant que le rapport de similitude est 2,4.

**4** La figure ci–contre, montre un papier triangulé. Calcule le rapport de similitude et détermine si ce rapport induit un agrandissement, une réduction ou une superposition des figures dans chacun des cas suivants :




**A** $\triangle LMN \sim \triangle ACB$

**B** $\triangle LMN \sim \triangle ZXY$

**C** $\triangle ADF \sim \triangle LMN$

**D** $\triangle EGA \sim \triangle CBA$

**E** $\triangle XYZ \sim \triangle BCA$

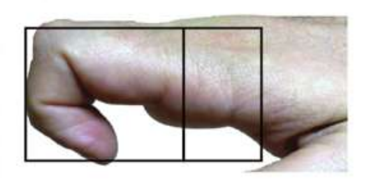
**Activité**

## Le rapport d'or



Récemment, nous voyons dans le marché, des écrans d'ordinateurs de téléviseurs dont le rapport entre la longueur et la largeur est proche de 16 : 9 au lieu de 4 : 3. Il y a eu plus de demandes de ce type d'écrans car il offre un confort à l'œil. Ces dimensions sont proches des dimensions du rectangle d'or.

### Le rectangle d'or



C'est un rectangle dont la longueur est inférieure au double de la largeur et qu'on peut partager en un carré et un rectangle semblable au rectangle d'origine.

Le rapport entre la longueur du rectangle d'or et sa largeur est appelé le rapport d'or.

Pour calculer le rapport d'or on considère que la longueur du rectangle d'or ABCD est x et sa largeur est une unité de longueur. En traçant le carré AFED, on obtient:

rectangle ABCD ~ rectangle EFBC

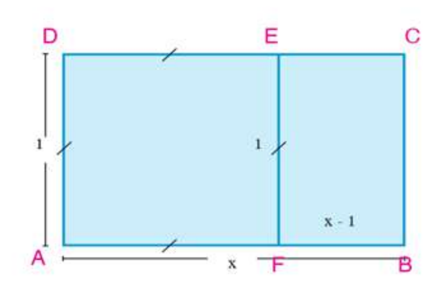
$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FB} \longrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

En résolvant l'équation du second degré on trouve que :

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ refusé




Le rapport d'or est environ 1,618 : 1

Certains artistes ont utilisé le rectangle d'or dans leurs œuvres artistiques. Le peintre célèbre Léonard de Vinci (1452 – 1519) a peint le tableau « Mona Lisa » ou « La Joconde » et Fibonacci (1170 – 1250) a posé la suite célèbre ( 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; …… ) dont le premier terme est 1, le deuxième terme est 1 et tout autre terme est obtenu en additionnant les deux termes qui le précèdent.

**A** Complète la suite jusqu'au dixième terme.

**B** Compare les rapports $\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$, ... puis compare–les avec le rapport d'or. Que remarques–tu ?

### Essaie de résoudre

**5** **A** Si les dimensions d'un rectangle sont 7,42 cm et 12 cm, ce rectangle est–il proche du rectangle d'or ?

**B** Quel est, à un centimètre près, la longueur du rectangle d'or ayant pour largeur 5 cm?

**C** Quel est, à un centimètre près, la largeur du rectangle d'or ayant pour longueur 194 cm?

**D** Tous les rectangles d'or sont–il semblables? Explique ta réponse.

## Test de compréhension

**Applications à la vie quotidienne** **Dans la figure ci-contre,** si la taille de l'homme est 1,8 mètres, estime la hauteur de : l'arbre, le lampadaire, le bâtiment et la voiture, puis explique comment peux–tu vérifier ton estimation.



# 2 - 2 Similitude des triangles

### A apprendre

- Cas de similitude de triangles.
- Propriétés de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle

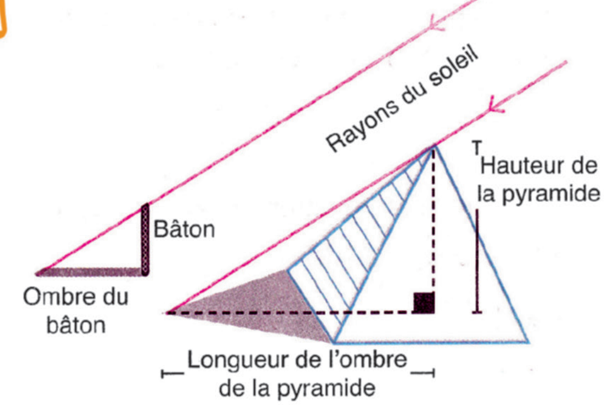
### Expressions de bas

- Corollaire

### Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéo projecteur
- Logiciels de dessin
- Papiers quadrillés
- Miroir plat
- Instruments de mesure
- Calculatrice




Le Pharaon a demandé au mathématicien Thalès (600 A.JC.) De trouver la hauteur de la grande pyramide. A l'époque, il n'y avait ni appareils ni instruments ni méthodes permettant de trouver la hauteur de la pyramide directement.

Thalès a fixé un bâton verticalement, puis il a commencé à mesurer la longueur de son ombre, puis l'a comparée à la longueur réelle du bâton jusqu'à ce qu'il ait trouvé que la longueur de l'ombre est égale à la longueur du bâton. A ce moment, il a mesuré la longueur de l'ombre de la pyramide. Cette mesure était la même que la hauteur de la pyramide.

Si on te demande de trouver la hauteur du mât du drapeau en utilisant un bâton et une bande graduée, vas-tu attendre le moment où la longueur de l'ombre du bâton soit égale à la longueur de l'ombre du mât du drapeau ou tu peux calculer la hauteur du mât du drapeau à tout moment d'une journée ensoleillée ? Explique ta réponse.

### Travail coopératif

**1-** Trace un triangle ABC tel que : $m(\angle A) = 50^\circ$, $m(\angle B) = 70^\circ$ et $AB = 4cm$

**2-** Trace un triangle DEF tel que : $m(\angle D) = 50^\circ$, $m(\angle E) = 70^\circ$, $DE = 5cm$

**3-** Mesure à un millimètre près les longueurs des côtés: $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DF}$ et $\overline{EF}$

**4-** Utilise ta calculatrice pour calculer les rapports $\frac{AC}{DF}$, $\frac{BC}{EF}$ et $\frac{AB}{DE}$

Ces rapports sont-ils égaux ? Que peux-tu déduire des deux triangles ?

Compare tes résultats aux résultats obtenus par d'autres groupe, puis note tes remarques.

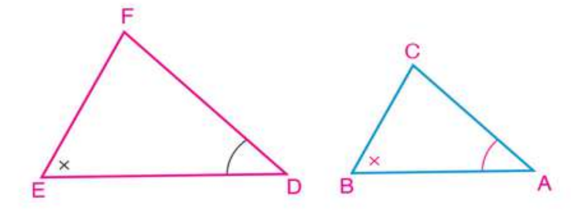



**Deux triangles ayant deux paires d'angles correspondants superposables sont semblables.**

**Dans la figure ci-contre :**

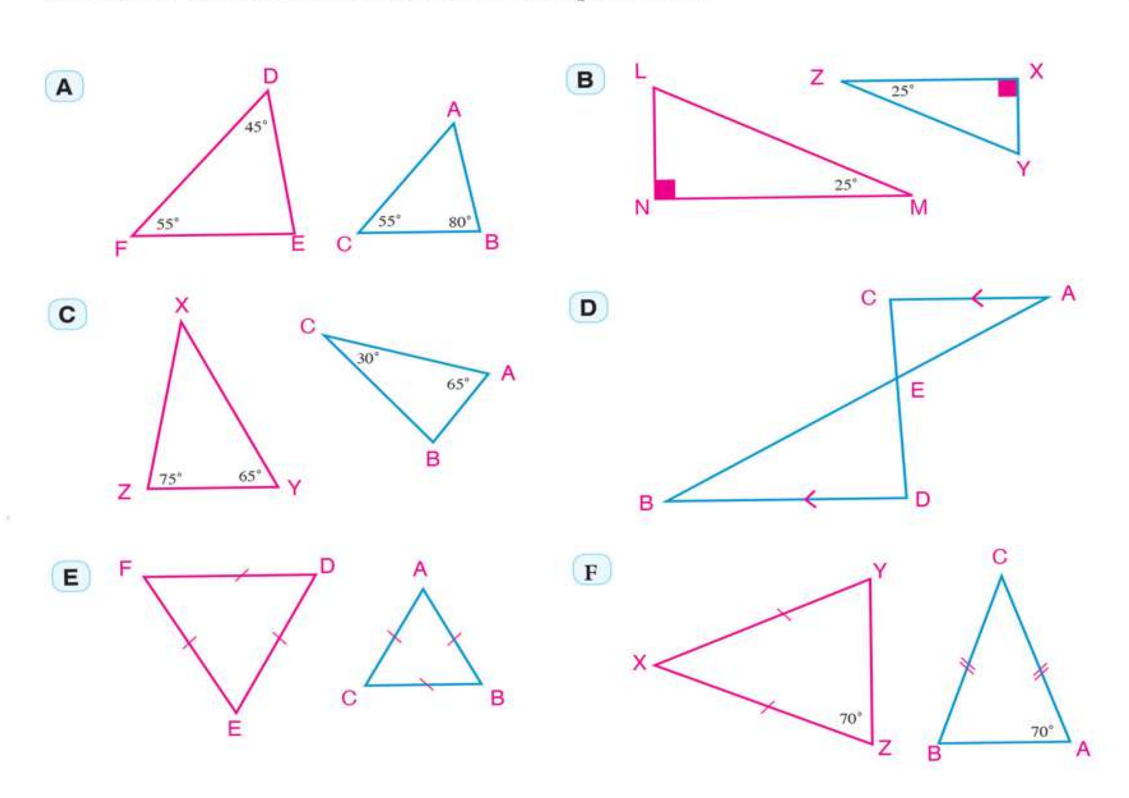
Si $\angle A \equiv \angle D$ , $\angle B \equiv \angle E$

alors $\triangle ABC \sim \triangle DEF$




## Essaie de résoudre

1. Parmi les pairs de triangles suivants, lesquels sont semblables ? Écris les triangles semblables en ordonnant les sommets correspondants :




**Remarque que:**

1- Deux triangles équilatéraux sont semblables. (comme dans E)

2- Deux triangles isocèles sont semblables si un angle à la base dans l'un des deux triangles a la même mesure qu'un angle à la base dans l'autre triangle. (comme dans F).

3- Deux triangles rectangles sont semblables si un angle aigu dans l'un des deux triangles a la même mesure qu'un angle aigu dans l'autre triangle. (comme dans B).

**Exemple**

**1** ABC est un triangle. $D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$ tels que $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$,
BD = 1,2cm , AE = 3cm , AC = 4cm et DE = 4,2cm.

**A** Démontre que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

**B** Trouve la longueur de $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$

**Solution**

**A** $\because$ $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ et $\overleftrightarrow{AB}$ est une sécante.

$\therefore \angle ADE \equiv \angle ABC$

Dans les deux triangles ADE et ABC :

$\because \angle ADE \equiv \angle ABC$ (démontré)

$\angle DAE \equiv \angle BAC$ (angle commun)

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (axiome)

A, E, D, C, B, 3 cm, 4.2 cm, 1.2 cm, 1 cm

**B** $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$:

$\frac{AD}{AD + 1{,}2} = \frac{3}{4} = \frac{4{,}2}{BC}$

$4\,AD = 3(AD + 1{,}2)$ , $\quad 3BC = 4 \times 4{,}2$

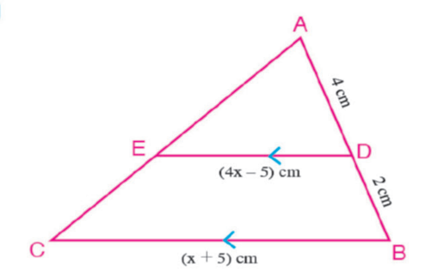
$4\,AD = 3AD + 3{,}6$ $\quad BC = \frac{4 \times 4{,}2}{3}$

$AD = 3{,}6cm$ $\quad BC = 5{,}6cm$

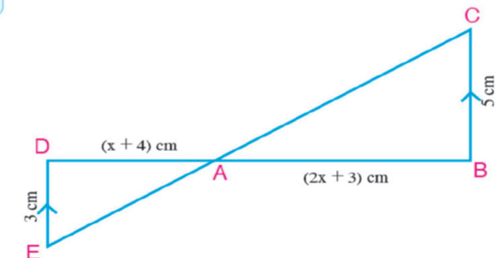
**Essaie de résoudre**

**2** Dans chacune des figures suivantes, démontre que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, puis trouve la valeur de x :





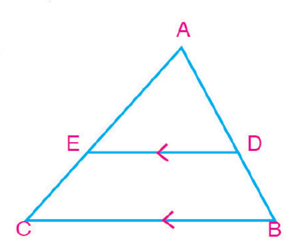


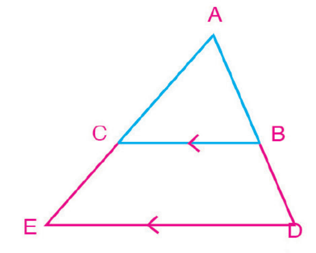



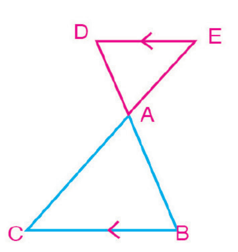

## Résultats importants




**Si une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés ou les droites qui les contiennent, le triangle formé est semblable au triangle initial.**



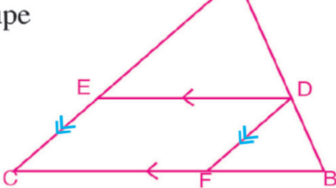




**Si** $\overleftrightarrow{DE} // \overline{BC}$ qui coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ en D, et E respectivement comme le montre les trois figures précédentes :
**alors** $\triangle$ ADE $\sim$ $\triangle$ ABC.

**Exemple**

**2** **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle et $D \in \overline{AB}$.
On trace $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E, $\overrightarrow{DF} // \overline{AC}$ qui coupe $\overline{BC}$ en F. Démontre que : $\triangle$ ADE $\sim$ $\triangle$ DBF




**Solution**

$\because \overline{DE} // \overline{BC}$ $\therefore \triangle$ ADE $\sim$ $\triangle$ ABC **(1)**

$\because \overline{DF} // \overline{AC}$ $\therefore \triangle$ DBF $\sim$ $\triangle$ ABC **(2)**

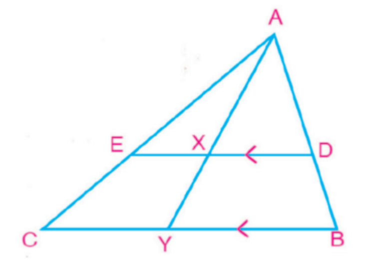
**(1) et (2) on obtient :** $\triangle$ ADE $\sim$ $\triangle$ DBF **(ce qu'il fallait démontrer)**

**Essaie de résoudre**

**3** **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle et $D \in \overline{AB}$
On trace $\overleftrightarrow{DE} // \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E, On trace $\overrightarrow{AX}$ qui coupe $\overline{DE}$ et $\overline{BC}$ en X et Y respectivement.

**A** Cite trois pairs de triangles semblables.

**B** Démontre que $\frac{DX}{BY} = \frac{XE}{YC} = \frac{DE}{BC}$.

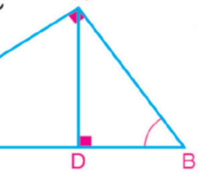






**La perpendiculaire issue du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles semblables et chacun des deux triangles obtenus est semblable au triangle initial.**

**Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$




Dans les deux triangles DBA et ABC on a :
m ($\angle$ ADB) = m ($\angle$ CAB) = 90° et $\angle$ B est commun aux deux triangles

$\therefore \triangle$ DBA $\sim$ $\triangle$ ABC **(axiome)** **(1)**

De même $\triangle$ DAC $\sim$ $\triangle$ ABC **(2)**

$\because$ les deux triangles sont semblables à un même troisième
$\therefore \triangle$ DBA $\sim$ $\triangle$ DAC $\sim$ $\triangle$ ABC

**Exemple**

③ ABC est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .telque $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ .Démontre que DA est une moyenne proportionnelle entre DB et DC..

**Solution**

**Hypothèses :** Dans le triangle $\triangle$ ABC: m $(\angle A) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .

**Conclusion :** Démontre que $(DA)^2 = DB \times DC$.

**Démonstration :** Dans le triangle $\triangle$ ABC

$\because$ m $(\angle A) = 90°$ et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

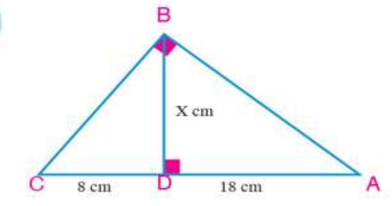
$\therefore \triangle DBA \sim \triangle DAC$ (corollaire)

$\therefore \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DA}$ d'où $(DA)^2 = DB \times DC$

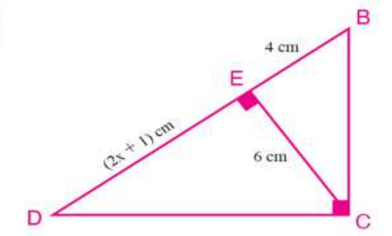
## Essaie de résoudre

④ Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x :

**A**




**B**




**Exemple**

④ **Dans la figure ci-contre, ABC** est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ Démontre que :

**A** $(AB)^2 = BC \times BD$

**B** $(AC)^2 = CB \times CD$



**Solution**

Dans le triangle ABC:

$\because$ m $(\angle A) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$ (corollaire)

$\therefore \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BD}{BA}$ , $(AB)^2 = BC \times BD$

, $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ (corollairet)

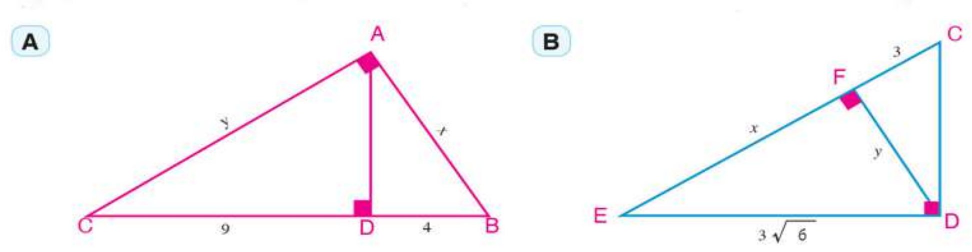
$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CA}$ , $(AC)^2 = CB \times CD$




**Dans les exemples 3 et 4 nous avons démontré le théorème d'Euclide déjà étudié au cycle préparatoire**

**Essaie de résoudre**

5 Trouve la valeur numérique de x et y dans la forme la plus simple (les dimensions sont mesurées en centimètres) :

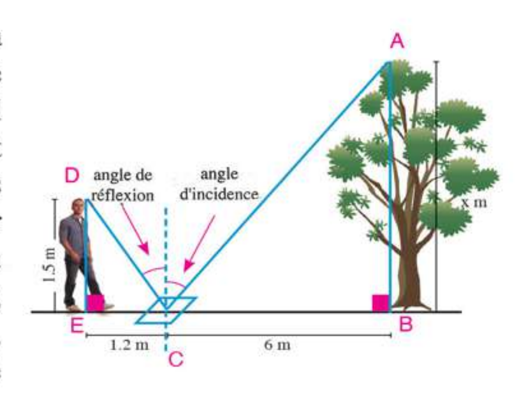



## Mesure indirecte

Dans certaines situations, il est difficile de mesurer les distances ou les hauteurs directement. Dans ce cas, on peut utiliser la similitude de triangles pour trouver ces mesures d'une manière indirecte. L'une de ces méthodes consiste à utiliser la propriété de la réflexion de la lumière dans un miroir plat comme l'indique l'exemple suivant :

**Exemple**

5 **Physique :** Youssef voulait déterminer la hauteur d'un arbre. Il a posé un miroir à une distance de 6 mètres du pied de l'arbre. Puis il a reculé jusqu'à ce qu'il ait pu voir le sommet de l'arbre à travers le centre du miroir. Dans cette position, la distance de Youssef au miroir était 1,2 mètre et la hauteur de ses yeux du sol était 1,5 mètre. Si les pieds de Youssef, le miroir et le pied de l'arbre sont alignés, trouve la hauteur de l'arbre sachant que l'angle d'incidence = l'angle de réflexion




**Solution**

Soient la hauteur de l'arbre x mètres et la mesure de l'angle d'incidence = $\theta°$

$\therefore$ la mesure de l'angle de réflexion $= \theta°$

Dans les deux triangles ABC et DEC

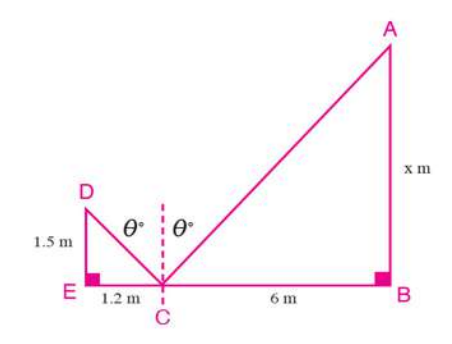
m ($\angle$ B) = m ($\angle$C) = 90°

m ($\angle$ ACB) = m ($\angle$ DCE) = $(90 - \theta)°$

$\therefore \triangle$ ABC $\sim \triangle$ DEC d'où $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$

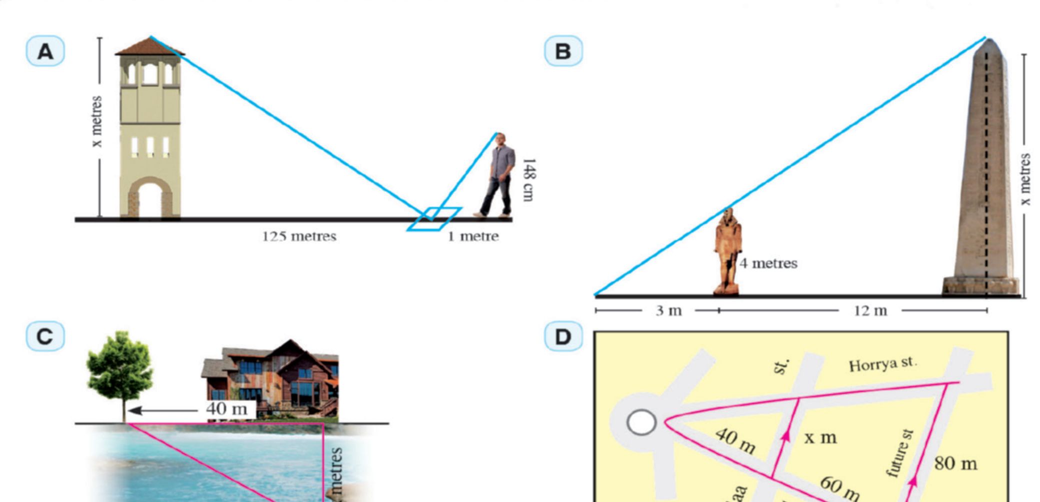
$\therefore \frac{x}{1.5} = \frac{6}{1.2}$ , x = 7,5 mètres

Donc la hauteur de l'arbre est 7,5 mètres.



## Essaie de résoudre

**6** Trouve la distance x dans chacun des cas suivants :







**Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles alors ces deux triangles sont semblables**

**Hypothèses :** ABC et DEF sont deux triangles tels que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

**Conclusion :** Démontre que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

**Démonstration :** Dans le triangle ABC

On détermine $X \in \overline{AB}$ tel que $AX = DE$

On trace $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

$\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (Corolaire (1))

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CA}{YA}$

$\because AX = DE$ (Construction)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{XY} = \frac{CA}{YA}$ (1)

$\because \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (Hypothèse) (2)

De (1) et (2) on déduit que: $XY = EF$, $YA = FD$

et $\triangle AXY \equiv \triangle DEF$ (Les côtés correspondants sont superposables)

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle AXY$

$\because \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (Résultat démontré)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Ce qu'il fallait démonter)

**Exemple**

**6** **Dans la figure ci-contre,** B , Y et C sont alignés. Démontre que:

**A** $\triangle ABC \sim \triangle XBY$

**B** $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle ABX$

**Solution**

**A** Dans les deux triangles ABC et XBY on a:

$\frac{AB}{XB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ , $\frac{BC}{BY} = \frac{18+6}{18} = \frac{4}{3}$

$\frac{AC}{XY} = \frac{18}{13.5} = \frac{4}{3}$

Donc $\frac{AC}{XY} = \frac{BC}{BY} = \frac{AB}{XB}$ d'où les longueurs de trois côtés correspondants sont proportionnelles

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle XBY$

**B** $\because \triangle ABC \sim \triangle XBY$ $\therefore m(\angle ABC) = m(\angle XBY)$

Donc: $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle ABX$

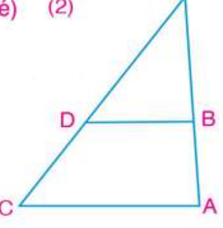
**7** **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$ tel que $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ et $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DE}$

Démontre que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

**Solution**

$\because \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ $\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$ (Propriété de la proportionnalité) (1)

$\because \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DE}$ $\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DE}$ (Propriété de la proportionnalité) (2)




De (1)et (2), on déduit que $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = \frac{CA}{DB}$

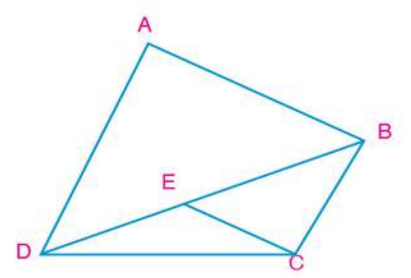
Donc $\triangle AEC \sim \triangle BED$

$\therefore m(\angle ACE) = m(\angle BDE)$

Ces deux angles sont alterne – internes par rapport à la sécante $\overleftrightarrow{CE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

**Essaie de résoudre**




**7** ABCD est un quadrilatère, $E \in \overline{BD}$ tel que:

$\frac{AB}{DA} = \frac{CE}{BC}$ et $\frac{BD}{DA} = \frac{EB}{BC}$ . Démontre que :

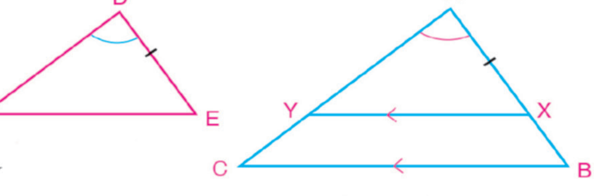
**A** $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ **B** $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$




**Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables.**

**Hypothèses :** $\angle A \equiv \angle D$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

**Conclusion :** $\triangle ABC \sim \triangle DEF$




**Démonstration :** On détermine $X \in \overline{AB}$ tel que $AX = DE$

On trace $\overrightarrow{XY} \mathbin{//} \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Y

$\because \overline{XY} \mathbin{//} \overline{BC}$ $\quad \therefore \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (corollaire) (1)

, $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$

$\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (hypothèse) , $AX = DE$ (construction)

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{DF}$ , $AY = DF$

$\therefore \triangle AXY \equiv \triangle DEF$ (deux côtés et un angle compris)

$\triangle AXY \sim \triangle DEF$ (2)

De (1) et (2), on déduit que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ Ce qu'il fallait démonter.

**Exemple**

**8** ABC est un triangle tel que AB = 8 cm, AC = 10 cm et BC = 12 cm. $E \in \overline{AB}$ tel que AE = 2cm, $D \in \overline{BC}$ tel que BD = 4cm.

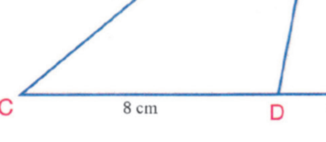
**A** Démontre que $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ puis déduis la longueur de $\overline{DE}$.

**B** Démontre que le quadrilatère ACDE est inscriptible.

**Solution**

$\because AB = 8cm$ et $AE = 2cm$ $\quad \therefore BE = 6cm$

**A** Dans les deux triangles BDE et BAC on a :




$\angle DBE \equiv \angle ABC$ (1)

, $\frac{BD}{BA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ , $\frac{BE}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ (2)

De (1) et (2) $\quad \therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC$ (théorème)

De la similitude $\frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$ , $\quad DE = \frac{1}{2} \times 10 = 5cm$

**B** De la similitude, on a $\angle$ BDE $\equiv$ $\angle$ BAC $\therefore$ m($\angle$ BDE) = m($\angle$ BAC)

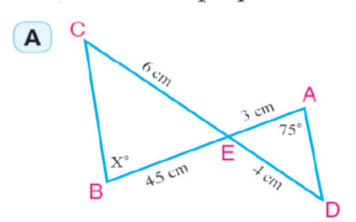
$\because$ $\angle$ BDE est extérieur au quadrilatère ACDE

$\therefore$ ACDE est un quadrilatère inscriptible.

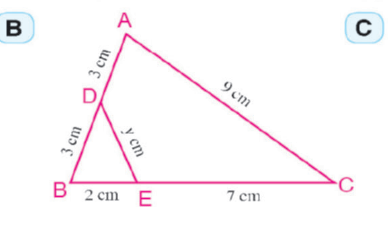
### Essaie de résoudre

**8** Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique du symbole utilisé pour la mesure en expliquant ta réponse :

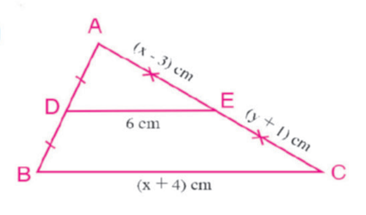
**A**




**B**



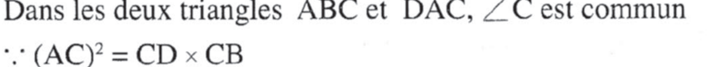

**C**




### Exemple

**9** ABC est un triangle. D $\in$ $\overline{BC}$ tel que $(AC)^2 = CD \times CB$. Démontre que $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ BCA

**Solution**

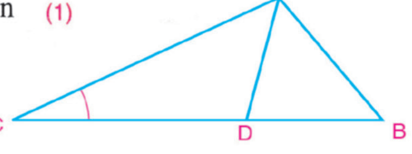


Dans les deux triangles ABC et DAC, $\angle$C est commun (1)

$\because$ $(AC)^2 = CD \times CB$

$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC}$ (2)






De (1) et (2), on déduit que $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ BCA (théorème)

### Essaie de résoudre

**9** ABC et DEF sont deux triangles semblables. X est le milieu de $\overline{BC}$ et Y est le milieu de $\overline{EF}$. Démontre que

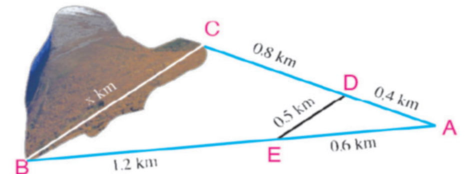
**A** $\triangle$ ABX $\sim$ $\triangle$ DEY

**B** AX $\times$ DE = AB $\times$ DY

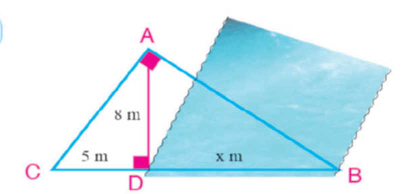
### Test de compréhension

Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur de x :

**A**




**B**



# 2 - 3 Relation entre les aires de deux polygones semblables

## A apprendre

- Relation entre les périmètres de deux polygones semblables et rapport de similitude.
- Relation entre les aires de deux polygones semblables et rapport de similitude.

## Expressions de base

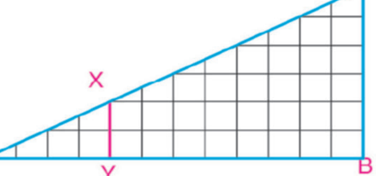
- Périmètre
- Aire
- Aire d'un polygone
- Côtés correspondants

## Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéoprojecteur
- Logiciels
- Papiers quadrillé
- Calculatrice




Sur un papier quadrillé, trace les deux triangles ABC et XYC.




**1-** Démontre que :
$\triangle XYC \sim \triangle ABC$. Calcule le rapport de la similitude dans ce cas.

**2-** Calcul le rapport entre l'aire du triangle XYC et l'aire du triangle ABC.

**3-** Détermine un point $D \in \overline{AC}$ puis trace $\overrightarrow{DD'} \,//\, \overline{AB}$ qui coupe $\overline{BC}$ en D' pour obtenir un triangle DD'C. Est-ce que $\triangle DD'C \sim \triangle XYC$ ?

**4-** Complète le tableau suivant :

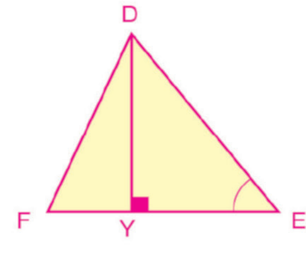
| Triangles | Rapport de similitude | Aire du premier triangle | Aire du deuxième triangle | Rapport de l'aire du premier triangle à l'aire du deuxième triangle |
|---|---|---|---|---|
| $\triangle XYC \sim \triangle ABC$ | $\frac{1}{3}$ | 4 | 36 | $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ |
| $\triangle DD'C \sim \triangle ABC$ | | | | |
| $\triangle XYC \sim \triangle DD'C$ | | | | |

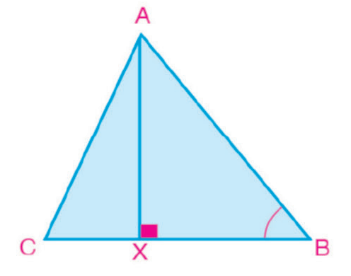
**5-** Quelle relation existe-t-il entre les rapports obtenus et les rapports de similitude ?

### 1) Rapport des aires de deux triangles semblables

**Théorème 3**

**Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.**




**Hypothèses :** $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

**Conclusion :** $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{CA}{FD}\right)^2$

> **Remarque**
> **La lettre A représente l'aire de la surface du polygone**

**Démonstration :** On trace $\overrightarrow{AX} \perp \overline{BC}$ tel que $\overrightarrow{AX} \cap \overline{BC} = \{X\}$,

On trace $\overrightarrow{DY} \perp \overline{EF}$ tel que $\overrightarrow{DY} \cap \overline{EF} = \{Y\}$

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle E)$ et $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (1)

Dans les deux triangles ABX et DEY on a :

$m(\angle X) = m(\angle Y) = 90^\circ$ , $m(\angle B) = m(\angle E)$

$\therefore \triangle ABX \sim \triangle DEY$ (Axiome)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AX}{DY}$ (2)

$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AX}{\frac{1}{2} EF \times AY} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AX}{DY}$

De (1) et (2) on obtient :

$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AB}{DE} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{CA}{FE}\right)^2$ (Ce qu'il fallait démonter)

**Remarque que:** $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$ , $\frac{AB}{DE} = \frac{AX}{DY}$

D'où $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AX}{DY}\right)^2$

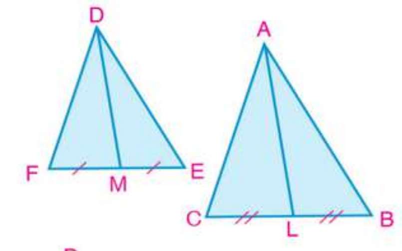
**Donc le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport entre les longueurs de deux hauteurs correspondantes dans les deux triangles.**

**Réflexion critique :**

**1-** Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, L est le milieu de $\overline{BC}$ et M est le milieu de $\overline{EF}$.

a-t-on $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AL}{DM}\right)^2$?

Explique ta réponse et note tes remarques

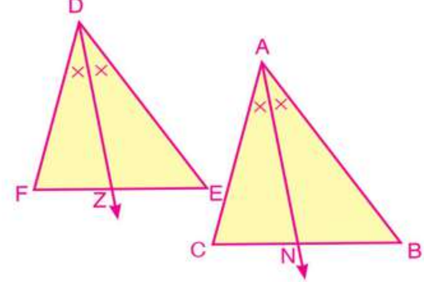



**2-** Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\overrightarrow{AN}$ est une bissectrice de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en N,

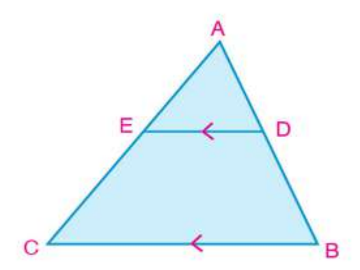
$\overrightarrow{DZ}$ est une bissectrice de $\angle D$ qui coupe $\overline{EF}$ en Z.

A-t-on $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AN}{DZ}\right)^2$?

Explique ta réponse et note tes remarques



**Exemple**




(1) **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle, D ∈ $\overline{AB}$ tel que $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, $\overrightarrow{DE}$ // $\overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E.

Si l'aire du triangle ABC = 784 cm², trouve :

**A** l'aire du tringle ADE **B** l'aire du trapèze DBCE

**Solution**

Dans Le triangle ADC :

$\because \overline{DE} // \overline{BC}$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (corollaire)

$\therefore \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$ (théorème)

Donc $\frac{A(\triangle ADE)}{784} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$ $\therefore A(\triangle ADE) = 784 \times \frac{9}{49} = 144cm^2$

$\because$ Aire du trapèze DBCE = aire du triangle ABC – aire du triangle ADE

$\therefore$ Aire du trapèze DBCE = 784 – 144 = 640 cm²

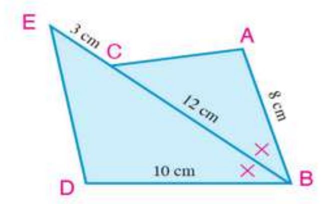
**Essaie de résoudre**

(1) **Dans la figure ci-contre :**

$\overrightarrow{BE}$ est une bissectrice de $\angle$ ABD,

$A(\triangle ABC) = 48$ cm²

Calcule $A(\triangle EBD)$




**Exemple**

(2) Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est 4 : 9 . Si le périmètre du grand triangle est 90 cm, trouve le périmètre du plus petit triangle.

**Solution**

Supposons que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{4}{9}$ d'où $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$

$\because \frac{\text{Périmètre de } \triangle ABC}{\text{Périmètre de } \triangle DEF} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3} < 1$

$\therefore$ Périmètre $\triangle ABC <$ Périmètre $\triangle DEF$

D'où $\frac{\text{Périmètre } (\triangle ABC)}{90} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ Périmètre $\triangle ABC = 60cm$

**Essaie de résoudre**

**2** ABC et DEF sont deux triangles semblables et $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{3}{4}$

**A** Si le périmètre du plus petit triangle est $45\sqrt{3}$ cm. calcule le périmètre du plus grand triangle

**B** Si EF = 28 cm, trouve la longueur de $\overline{BC}$.

**Exemple**

**3** Si chaque centimètre sur la carte représente 10 kilomètres en réalité, trouve à un kilomètre carré près, l'aire réelle de la surface représentée sur la carte par le triangle ABC sachant que ($\triangle$ ABC) = 6,4cm².

**Solution**

Echelle = Rapport de similitude = $\frac{1}{10 \times 10^5}$

$\frac{A(\triangle ABC)}{\text{Aire réelle}}$ = Le carré du rapport de similitude

$\frac{6{,}4}{\text{Aire réelle}} = \left(\frac{1}{10 \times 10^5}\right)^2$

Aire réelle = $6{,}4 \times 10 \times 10 \times 10^5 \times 10^5$ cm²

$\simeq 640$ km²

**Essaie de résoudre**

**3** **A** Dans la carte ci-dessus, utilise les instruments de mesure pour calculer en centimètres carrés l'aire du triangle DEF. Utilise le résultat pour estimer l'aire réelle de la surface représentée par ce triangle.

**B** Utilise une carte de la République Arabe d'Egypte pour calculer à une centaine de kilomètres carrés près la superficie du Sinaï. Compare ton résultat aux résultats de tes camarades.

## 2) Rapport des aires de deux polygones semblables




Cherche avec l'un de tes camarades la possibilité de partager deux polygones semblables en un même nombre de triangles correspondants semblables.

**1-** Dessine des polygones semblables comme dans les figures (1) et (2).

**2-** Dans la figure (1) , trace $\overrightarrow{AC}$. Que remarques-tu ?

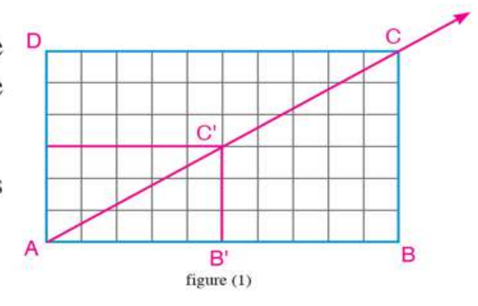


figure (1)

**3-** Dans la figure (2) , trace $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ . Que remarques–tu ? Trouves–tu une interprétation à tes remarques ?

**Remarque que:** Dans les deux triangles AB'C' et ABC, on a :

$m(\angle AB'C') = m(\angle B)$    de la similitude des deux polygon

d'où $\overline{B'C'}$ // $\overline{BC}$

$\therefore \triangle AB'C' \sim \triangle ABC$    (corollaire)

De même $m(\angle AE'D') = m(\angle E)$

$\therefore \overline{E'D'}$ // $\overline{ED}$ et par conséquent $\triangle AE'D' \sim \triangle AED$    et ainsi de suite ...

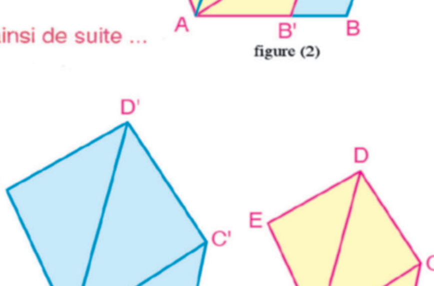
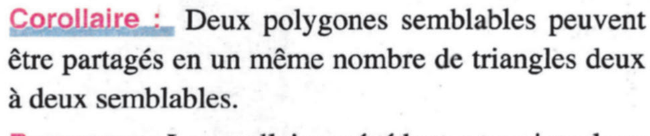
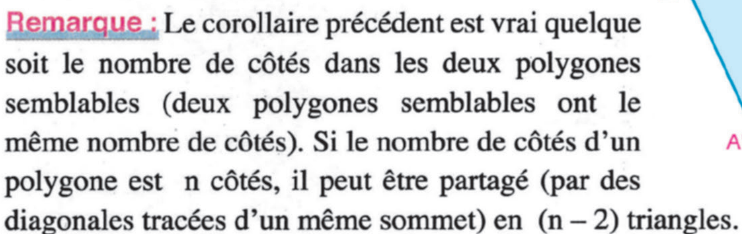


figure (2)



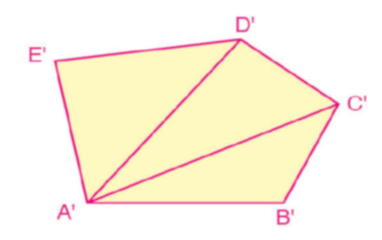
**Corollaire :** Deux polygones semblables peuvent être partagés en un même nombre de triangles deux à deux semblables.

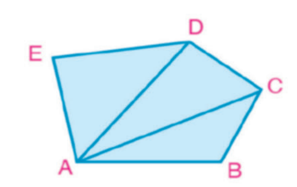


**Remarque :** Le corollaire précédent est vrai quelque soit le nombre de côtés dans les deux polygones semblables (deux polygones semblables ont le même nombre de côtés). Si le nombre de côtés d'un polygone est n côtés, il peut être partagé (par des diagonales tracées d'un même sommet) en $(n-2)$ triangles.




**Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.**




**Hypothèses :** polygone ABCDE $\sim$ polygone A'B'C'D'E'

**Conclusion :** $\dfrac{A\text{(polygone ABCDE)}}{A\text{(polygone A'B'C'D'E')}} = \left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2$

**Démonstration :** Des points A et A' on trace $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{A'C'}$ et $\overline{A'D'}$

$\because$ polygone ABCDE $\sim$ polygone A'B'C'D'E'

$\therefore$ Ils peuvent être partagés en un même nombre de triangles correspondants semblables (corollaire)

On a : $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle A'B'C')} = \left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$ , $\dfrac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle A'C'D')} = \left(\dfrac{CD}{C'D'}\right)^2$ , $\dfrac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'D'E')} = \left(\dfrac{DE}{D'E'}\right)^2$

$\because \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{AB}{A'B'}$    (de la similitude des deux polygones)

$$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle A'B'C')} = \frac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle A'C'D')} = \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

D'après les propriétés de la proportionnalité :

$$\frac{A(\triangle ABC) + A(\triangle ACD) + A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'B'C') + A(\triangle A'C'D') + A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

D'où $\frac{A\text{ (polygone ABCDE)}}{A\text{ (polygone A'B'C'D'E')}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$ (Ce qu'il fallait démonter)

**Remarque**

$$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$$

## Essaie de résoudre

**4** **A** Si Polygone ABCD ~ Polygone A'B'C'D' et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{3}$ , trouve le valeur de :

$\frac{A\text{ (polygone ABCD)}}{A\text{ (polygone A'B'C'D')}}$ , $\frac{\text{périmètre du polygone ABCD}}{\text{périmètre du polygone A'B'C'D'}}$

**B** Si les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' sont semblables, et si le rapport entre leurs aires est 4 : 25 , trouve le valeur de : $\frac{AB}{A'B'}$ , $\frac{\text{périmètre du polygone AB CDE}}{\text{périmètre du polygone A'B'C'D'E'}}$

**C** Si le rapport entre les périmètres de deux polygones est 1 : 4 et l'aire du premier polygone est 25 $cm^2$, calcule l'aire du deuxième polygone.

**D** Si les longueurs de deux côtés correspondants dans deux polygones semblables sont 12 cm et 13 cm et si l'aire du plus petit polygone est 135 $cm^2$, calcule l'aire du plus grand polygone.

### Exemple

**4** ABCD et XYZL sont deux polygones semblables tels que $m(\angle A) = 40°$ et $XY = \frac{3}{4}AB$, CD = 16cm.

Calcule : **1°)** $m(\angle X)$

**2°)** la longueur de $\overline{ZL}$

**3°)** A(polygone ABCD) : A (polygone X Y Z L)

### Solution

**1°)** $\because$ polygone ABCD ~ polygone XYZL

$\therefore m(\angle A) = m(\angle X)$ d'où $m(\angle X) = 40°$ (C.Q.F.D en 1°)

**2°)** $\because XY = \frac{3}{4}AB \quad \therefore \frac{AB}{XY} = \frac{4}{3}$ (propriété de la proportionnalité)

De la similitude des deux polygones, on déduit que $\frac{AB}{XY} = \frac{CD}{ZL}$

$\therefore \frac{4}{3} = \frac{16}{ZL}$ donc $ZL = \frac{3 \times 16}{4} = 12$cm (C.Q.F.D en 2°)

A(polygone ABCD) : A (polygone XYZL) $= (AB)^2 : (XY)^2$

$= 16k^2 : 9k^2$

**3°)** $= 16 : 9$ (C.Q.F.D en 3°)

**Remarque**

AB = 4k

XY = 3k

$k \neq 0$

**Exemple**

5 Le rapport entre les périmètres de deux polygones semblables est $3 : 4$ . Si la somme de leurs aires est $225 \text{ cm}^2$ , calcule l'aire de chaque polygone.

**Solution**

$\because$ Le rapport entre les périmètres des deux polygones $= 3 : 4$

$\therefore$ Le rapport entre deux côtés correspondants $= 3 : 4$

Supposons que l'aire du premier polygone $= 9\,x \text{ cm}^2$,

$\therefore$ l'aire du deuxième polygone $= 16\,x\text{cm}^2$

$\therefore 9x + 16x = 225$ , d'où $x = \frac{225}{9 + 16} = 9$

$\therefore$ L'aire du premier polygone $= 9 \times 9 = 81\text{cm}^2$

$\therefore$ L'aire du deuxième polygone $= 16 \times 9 = 144\text{cm}^2$

**Essaie de résoudre**

5 **Lien avec l'agriculture :** Deux fermes ont la forme de deux polygones semblables. Le rapport entre les longueurs de deux côtés correspondants est $5 : 3$ . Si la différence entre leurs superficies est égale à 32 acres, trouve l'aire de chaque ferme.

**Exemple**

6 ABCD et XYZL sont deux polygones semblables. Les deux diagonales du premier polygone se coupent en M et les deux diagonales du deuxième polygone se coupent en N. Démontre que A(polygone ABCD) : A(polygone XYZL) $= (MC)^2 : (NZ)^2$

**Solution**

$\because$ polygone ABCD $\sim$ polygone XYZL

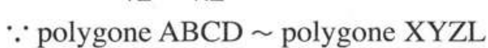
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle XYZ$,

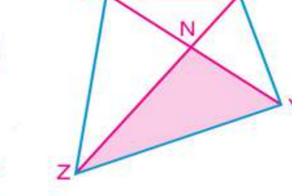
et $\triangle DBC \sim \triangle LYZ$ (corollaire)

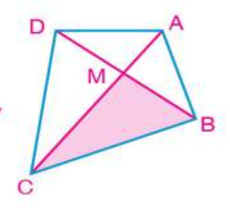
$\therefore \triangle MBC \sim \triangle NYZ$ (pourquoi ?)

d'où $\frac{BC}{YZ} = \frac{MC}{NZ}$ (1)








$\because$ polygone ABCD $\sim$ polygone XYZL

$\therefore \frac{\text{Aire du polygone ABCD}}{\text{Aire du polygone XYZL}} = \left(\frac{BC}{YZ}\right)^2$ (2)

De (1) et (2), on déduit que :

A(polygone ABCD) : A(polygone XYZL) $= (MC)^2 : (NZ)^2$

### Essaie de résoudre

**6** ABCD et XYZL sont deux polygones semblables. Si M est le milieu de $\overline{BC}$ et N est le milieu de $\overline{YZ}$, démontre que A(polygone ABCD) : A(polygone XYZL) = $(MD)^2 : (NL)^2$

### Exemple

**7** ABC est un triangle rectangle en B. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont trois côtés correspondants dans trois polygones semblables X , Y et Z construits respectivement sur les trois côtés du triangle ABC. Démontre que A(polygone X) + A(polygone Y) = A(polygone Z)

**Solution**

$\because$ polygone X $\sim$ polygone Z $\quad \therefore \dfrac{\text{A(polygone X)}}{\text{A(polygone Z)}} = \dfrac{(AB)^2}{(AC)^2}$

$\because$ polygone Y $\sim$ polygone Z $\quad \therefore \dfrac{\text{A(polygone Y)}}{\text{A(polygone Z)}} = \dfrac{(BC)^2}{(AC)^2}$

$$\because \frac{\text{A (polygone X)}}{\text{A (polygone Z)}} + \frac{\text{A (polygone Y)}}{\text{A (polygone Z)}} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2} + \frac{(BC)^2}{(AC)^2} = \frac{(AB)^2 + (BC)^2}{(AC)^2} \quad (1)$$

$\because m(\angle B) = 90^\circ \quad (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \quad (2)$

De (1) et (2), on déduit que $\dfrac{\text{A (polygone X)}}{\text{A (polygone Z)}} + \dfrac{\text{A (polygone Y)}}{\text{A (polygone Z)}} = 1$

D'où A (polygone X) + A(polygone Y) = A(polygone Z)

### Essaie de résoudre

**7** Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 5 cm et BC = 13 cm. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont trois côtés correspondants dans trois polygones semblables L , M et N construits respectivement sur les trois côtés du triangle ABC à l'extérieur du triangle. Si l'aire du polygone L est égale à 100 cm², calcule l'aire de chacun des polygones M et N.

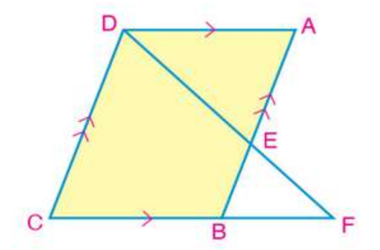
### Test de compréhension

**Dans la figure ci-contre,** ABCD est un parallélogramme

$E \in \overline{AB}$ tel que $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{3}{2}$, $\overrightarrow{DE} \cap \overrightarrow{CB} = \{F\}$

**1** Démontre que: $\triangle$ DCF $\sim$ $\triangle$ EAD

**2** Trouve $\dfrac{A(\triangle DCF)}{A(\triangle EAD)}$



# 2 - 4 Application de la similitude dans le cercle

## A apprendre

- Relation entre deux cordes sécantes d'un cercle.
- Relation entre deux sécantes d'un cercle d'un point extérieur au cercle.
- Relation entre la longueur d'une tangente à un cercle et les longueurs des deux parties d'une sécante tracées d'un point à l'extérieur du cercle.
- Modélisation, résolution de problèmes et application à la vie quotidienne utilisant la similitude des polygones dans un cercle.

## Expressions de base

- Corde
- Sécante
- Tangente
- Diamètre
- Tangente commune extérieurement
- Tangente commune intérieurement
- Cercles concentriques




Dans chacune des figures suivantes, il y a deux triangles semblables. Ecris les noms des triangles en ordonnant les sommets correspondants, puis déduis les côtés correspondants.

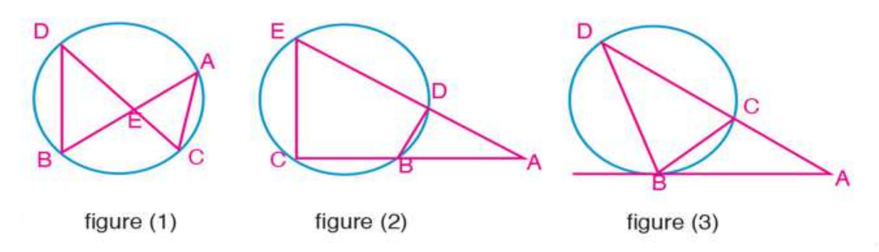



figure (1) figure (2) figure (3)

- **Dans la figure (1):** Y a–t–il une relation entre $EA \times EB$ et $EC \times ED$ ?
- **Dans la figure (2):** Y a–t–il une relation entre $AE \times AD$ et $AC \times AB$ ?
- **Dans la figure (3):** Y a–t–il une relation entre $AD \times AC$ et $(AB)^2$ ?

## Problème type

Si deux droites contenant respectivement deux cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ d'un cercle se coupent en un point E , alors $EA \times EB = EC \times ED$

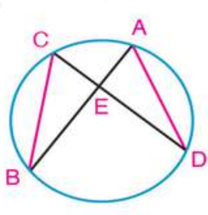



figure (1)

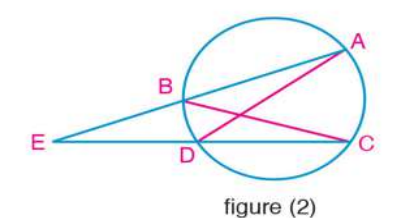


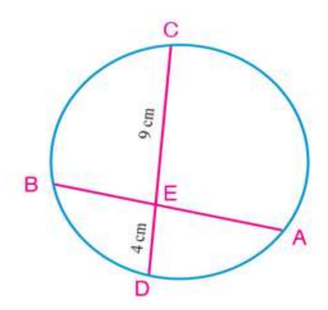

figure (2)

**Pour démontrer ce résultat :**

- Trace $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$
- Dans chacune des deux figures, démontre que les deux triangles EAD et ECB sont semblables. Par conséquent, on obtient :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB} \qquad \therefore EA \times EB = EC \times ED$$

**Exemple**




**1** **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$,

Si $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$, EC = 9cm et ED = 4cm,

trouve la longueur de $\overline{EB}$

**Solution**

$\because \frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$ $\therefore$ EA = 4k et EB = 3k où $k \neq 0$

$\because \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ $\therefore EA \times EB = EC \times ED$ (problème type)

d'où : $4k \times 3k = 9 \times 4$

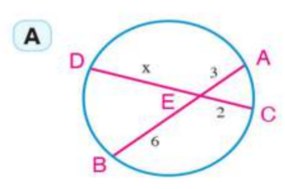
$12k^2 = 36$

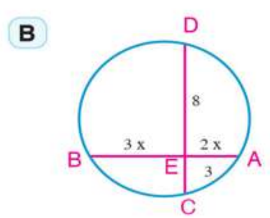
$k^2 = 3$

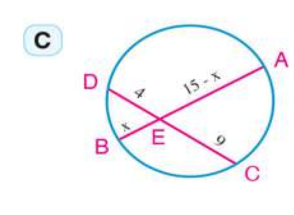
$k = \sqrt{3}$ , $EB = 3\sqrt{3}$ cm

**Essaie de résoudre**

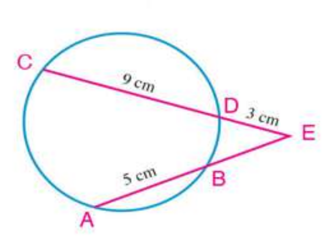
**1** Trouve la valeur de x dans chacune de figures suivantes (les longueurs sont mesurées en centimètres) :




**Exemple**




**2** **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$, A B = 5cm, CD = 9cm et ED = 3cm. Trouve la longueur de $\overline{BE}$

**Solution**

Soit la longueur de B E = x cm.

$\because \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$

$\therefore EB \times EA = ED \times EC$ (problème type)

Donc: $x (x + 5) = 3 (3 + 9)$

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$(x - 4) (x + 9) = 0$

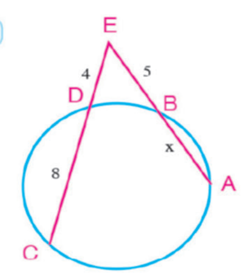
$\therefore x = 4$ , $x = -9$ refusée

$\therefore$ La longueur de $\overline{BE}$ = 4cm.

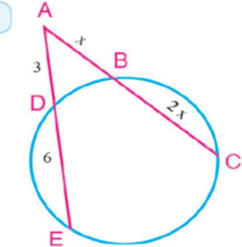
### Essaie de résoudre

**2** Trouve la valeur de x dans chacune des figures suivantes :

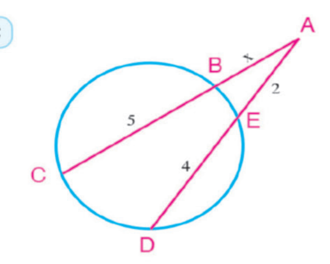
**A**




**B**




**C**



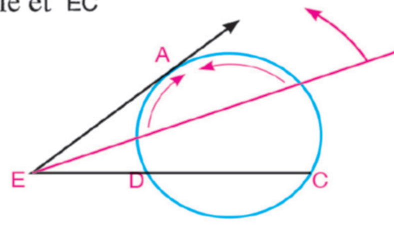




**D'un point extérieur à un cercle si on mène une sécante et une tangente, le produit de la longueur de la sécante par la longueur de la partie extérieure de la sécante est égal au carré de la longueur de la tangente.**

**Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{EA}$ est une tangente au cercle et $\overrightarrow{EC}$ coupe le cercle en D, C

$\therefore (EA)^2 = ED \times EC$







**3** **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{EA}$ coupe le cercle en D et C respectivement.
Si ED = 4cm, CD = 5cm, trouve la longueur de $\overline{EA}$

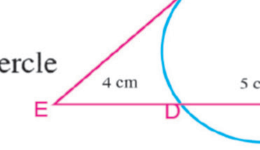
**Solution**

$\because$ $\overrightarrow{EA}$ est une tangente et $\overrightarrow{EC}$ est une sécante au cercle

$\therefore (EA)^2 = ED \times EC$ (corollaire)

$(EA)^2 = 4(4 + 5) = 36$

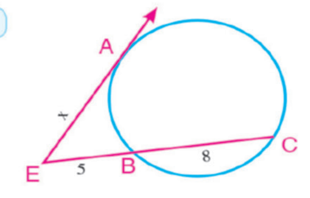
$\therefore EA = 6cm$



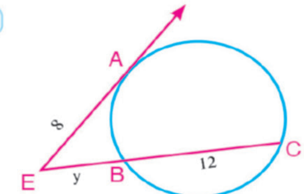

### Essaie de résoudre

**3** Dans chacune de figures suivantes, $\overrightarrow{EA}$, est une tangente au cercle. Trouve la valeur numérique de x , y et z (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

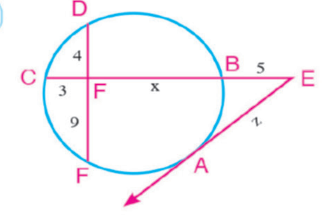
**A**




**B**




**C**



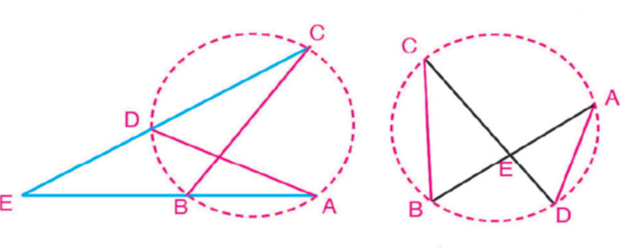
## Réciproque du problème type

Si deux droites contenant respectivement deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ se coupent en un point E (différent des points A, B, C et D) et si $EA \times EB = EC \times ED$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.

## Remarque que:

$EA \times EB = EC \times ED$

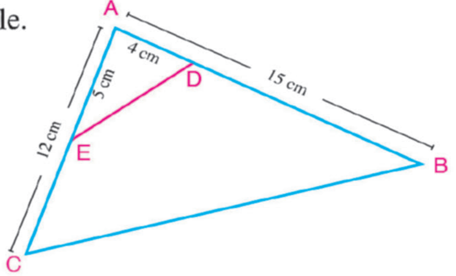
donc $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$




- A-t-on $\triangle EAD \sim \triangle ECB$? Pourquoi ?
- A-t-on $m(\angle A) = m(\angle C)$? Pourquoi ?
- Les points A, B, C, et D appartiennent-ils à un même cercle ? Explique ta réponse.



**4** Soit ABC un triangle tel que AB = 15 cm et AC = 12 cm. $D \in \overline{AB}$ tel que AD = 4cm et $E \in \overline{AC}$ tel que AC = 5cm.
Démontre que le quadrilatère DBCE est inscriptible.




**Solution**

$\because AD \times AB = 4 \times 15 = 60,$

$AE \times AC = 5 \times 12 = 60$

$\therefore AD \times AB = AE \times AC$

$\because \overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{CE} = \{A\}$ et $AD \times AB = AE \times AC$

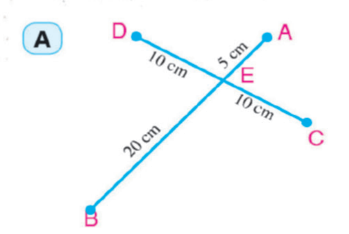
$\therefore$ les points D, B, C et E sont cocycliques. (Réciproque du problème type)

d'où le quadrilatère DBCE est inscriptible

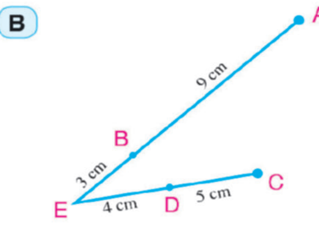
## Essaie de résoudre

**4** Dans lesquelles des figures suivantes, les points A, B, C et D sont-ils cocycliques ? Explique ta réponse.

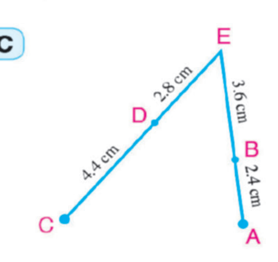
**A**




**B**

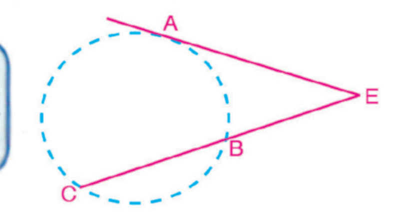



**C**




**Corollaire 2**

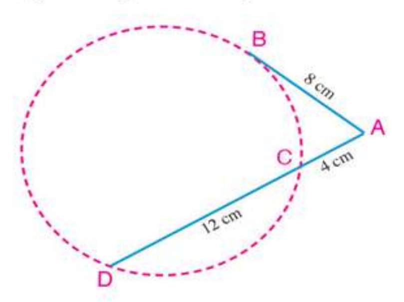
**Si $(EA)^2 = EB \times EC$ alors $\overleftrightarrow{EA}$ est une tangente au cercle passant par les points A, B et C.**



**Exemple**

**5** Soit ABC un triangle tel que AB = 8 cm et AC = 4 cm. D ∈ $\overrightarrow{AC}$ et D ∉ $\overline{AC}$ tel que CD = 12cm. tel que $\overline{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D.

**Solution**




∵ AC × AD = 4 (4 + 12) = 64,

et $(AB)^2 = (8)^2 = 64$

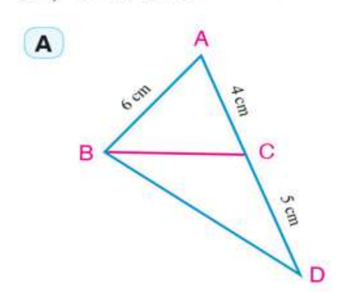
∴ $(AB)^2 = AC \times AD$

∴ $\overline{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D.

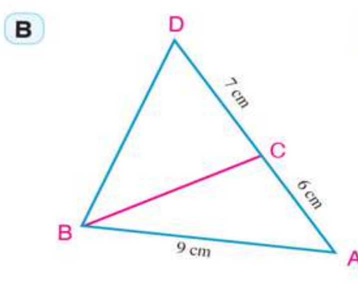
**Essaie de résoudre**

**5** Dans lesquelles des figures suivantes, $\overleftrightarrow{AB}$ est-une tangente au cercle passant par les points B , C et D ?

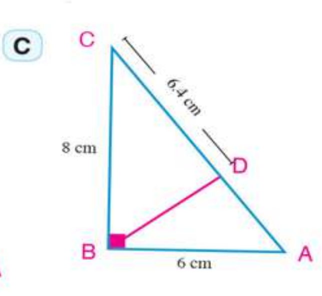
**A**




**B**

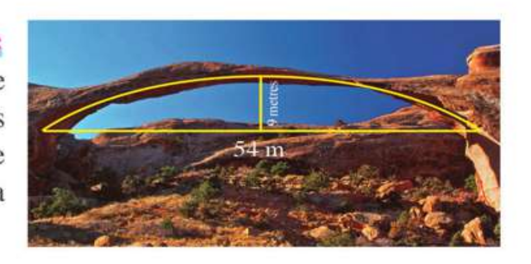



**C**

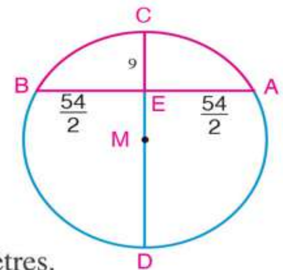



**Exemple**

**6** **Application à la vie quotidienne : Liens avec la Géologie :** Dans une zone côtière, il y a une couche de sol sous la forme d'un arc naturel. Les géologues ont trouvé que c'est un arc de cercle comme le montre la figure ci-contre. Trouve la longueur du rayon du cercle de cet arc.




**Solution**




Soit la longueur de rayon du cercle = R mètres

∵ $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes sécantes en E

∴ EA × EB = EC × ED

$27 \times 27 = 9 \times (2R - 9)$

$2R - 9 = 81$

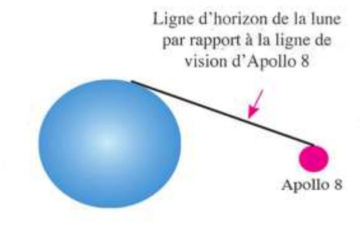
$R = 45$

La longueur du rayon du cercle de cet arc est égale à 45 mètres.

## Activité

**Lien avec l'espace :** Apollo 8 est le premier vaisseau spatial qui amène un Homme vers l'orbite lunaire.

La ligne de vision d'Apollo 8 vers l'horizon de la lune est une droite tangente et le vaisseau a volé dans une orbite circulaire à une altitude moyenne de 180 km de la surface de la lune. Calcule la distance entre le vaisseau et l'horizon de la lune sachant que le rayon de la lune est approximativement 1740 kilomètres.




### Solution

On peut modéliser le problème sous forme d'un cercle de centre M où $\overline{AB}$ représente la ligne de vision d'Apollo 8 à l'horizon du vaisseau. AB est la distance entre le vaisseau et l'horizon de la lune.

$AC = 180\text{km}$ (altitude moyenne de la surface de la lune)

$CD = 2 \times 1740 = 3480$ km (diamètre de la lune)

$AD = 3480 + 180 = 3660\text{km}$

On a : $(AB)^2 = AC \times AD$ (tangente et parties de la sécante)

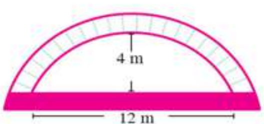
$= 180 \times 3660 = 658800$

$AB \simeq 812\text{km}$

La distance entre le vaisseau et l'horizon de la lune est égale environ 812 km

### Essaie de résoudre

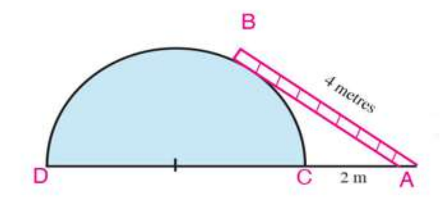
**6** **Lien avec l'ingénierie routière :** On creuse les tunnels circulaires pour faciliter la circulation des véhicules et pour éviter les embouteillages.




Quelle est la longueur du rayon du tunnel illustré par la figure ci-contre sachant que la hauteur de l'arc au dessus du centre du tunnel est égale à 4 mètres.

### Test de compréhension

**Lien avec l'industrie :** Une échelle de longueur 4 mètres repose par l'une de ses extrémités sur un sol horizontal rugueux et par l'autre extrémité sur un réservoir sous forme d'une demi-sphère comme le montre la figure ci-contre. Si la distance entre l'extrémité inférieure de l'échelle et la base du réservoir est 2 mètres, calcule la longueur du rayon de la demi-sphère.

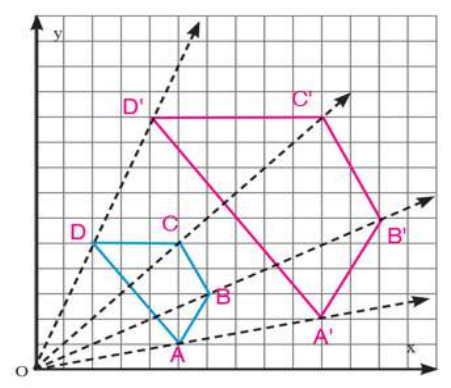


## Activité

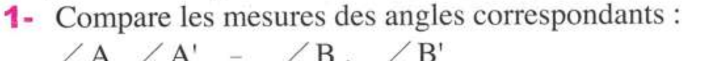
### Homothétie

Tu utilises peut-être certains logiciels sur ton ordinateur pour agrandir ou pour réduire des documents ou des images à une taille donnée pour pouvoir les insérer dans un lieu déterminé.

La figure ci-contre, illustre une figure ABCD et son image A'B'C'D' par une transformation géométrique.



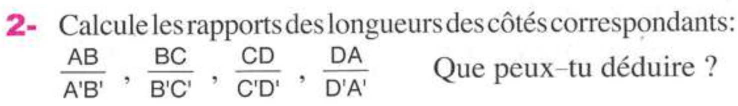

**1-** Compare les mesures des angles correspondants :



$\angle A$, $\angle A'$ – $\angle B$, $\angle B'$

$\angle C$, $\angle C'$ – $\angle D$, $\angle D'$ Que peux-tu déduire ?

**2-** Calcule les rapports des longueurs des côtés correspondants:



$\frac{AB}{A'B'}$ , $\frac{BC}{B'C'}$ , $\frac{CD}{C'D'}$ , $\frac{DA}{D'A'}$ Que peux-tu déduire ?



**3-** A-t-on Polygone ABCD ~ polygone A'B'C'D' ?

Tu as déjà étudié que les transformations géométriques (symétrie – translation – rotation) sont des isométries du plan car la figure et son image sont superposables et par conséquent, les angles ont une même mesure et les côtés correspondants ont une même longueur.

La figure précédente montre une autre transformation où les angles correspondants ont même mesure et les longueus des côtés correspondants sont proportionnelles. La transformation présentée dans la figure est appelée homothétie.

**Définition**

### Homothétie

**Soit O un point fixe d'un plan et k un nombre tel que $k \in \mathbb{R}^*$**

**L'homothétie ( O , k ) : On appelle une homothétie de centre O et de rapport k la transformation géométrique qui transforme tout point A du plan en un autre point A' du même plan telle que :**

**$OA' = |K| \times OA$**

**Rappel**

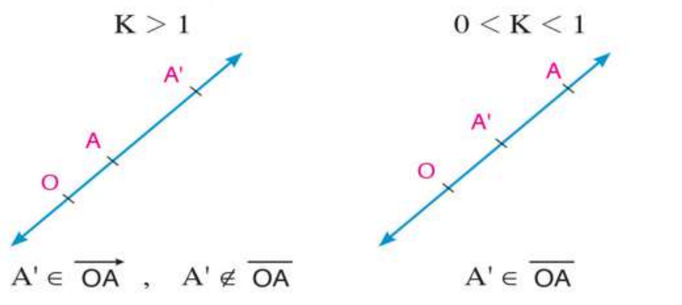
$|K| = K$ , $K > 0$

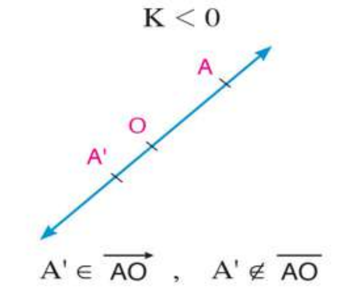
$|K| = -K$ , $K < 0$

**On note $H_{(o,\,k)}\,A = (A')$ qui se lit : A' est l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k.**

**Remarques importantes :**

(1) Soient O et A deux points dans un plan. Si on trace $\overleftrightarrow{OA}$ , alors :



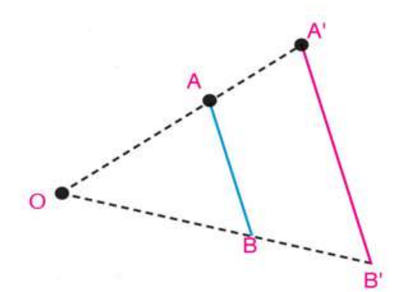

$A' \in \overrightarrow{OA}$ , $A' \notin \overline{OA}$ $A' \in \overline{OA}$ $A' \in \overrightarrow{AO}$ , $A' \notin \overline{AO}$

**Réfléchis :**

Si $H_{(O,2)}\,A = (A')$, et $H_{(O,2)}\,B = (B')$, détermine la position des deux points A' et B'. A-t-on $\overline{A'B'}\ //\ \overline{AB}$ ? Explique ta réponse.

**2** Si $H_{(O,2)}\,A = (A')$, et $H_{(O,2)}\,B = (B')$

**alors ,** $\overline{A'B'}$ est l'image de $\overline{AB}$,




**Dans les deux triangles**

$\triangle$ OA'B', $\triangle$ OAB on a :

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$ , $\angle B$ est commun

$\therefore \triangle OA'B' \sim \triangle OAB$

De ce qui précède, on déduit que :

**1°)** $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$ **2°)** $\overline{A'B'}\ //\ \overline{AB}$

**3** L'homothétie conserve :

**A** le rapport entre les longueurs

**B** 'alignement et interligne

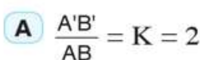
**C** les mesures d'angles

**D** le parallélisme

**Remarque que:**

| Rapport de similitude k | $= \frac{\text{Distance sur l'image}}{\text{Distance réelle}}$

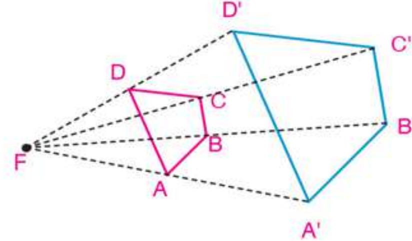
Les figures suivantes montrent le cas où l'homothétie de centre O est un agrandissement et le cas où c'est une réduction :

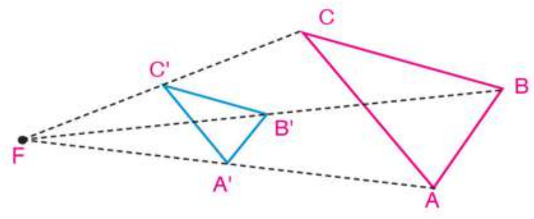


**A** $\frac{A'B'}{AB} = K = 2$



**B** $\frac{A'B'}{AB} = K = \frac{1}{2}$




La figure A'B'C'D' est un agrandissement de la figure ABCD. Le rapport $k = 2$ et on a :

$A'B' = 2AB$ , $B'C' = 2BC$

$C'D' = 2CD$ et $D'A' = 2DA$

Le triangle A'B'C' est une réduction du triangle ABC. Le rapport $k = \frac{1}{2}$ et on a :

$A'B' = \frac{1}{2}AB$ et $B'C' = \frac{1}{2}BC$

$C'A' = \frac{1}{2}CA$

**C** **Dans la figure ci-contre,** $k = -\frac{1}{2} < 0$

On a $A' \in \overrightarrow{AO}$, $A' \notin \overline{AO}$ ,

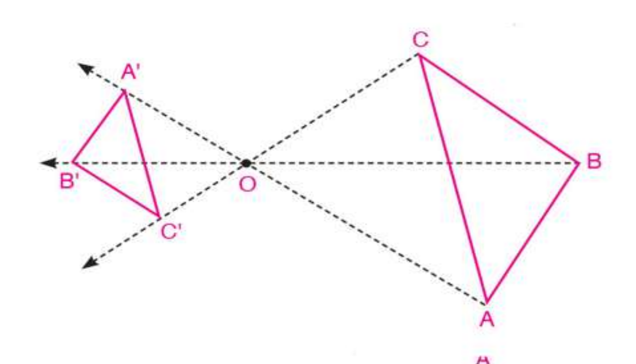
$B' \in \overrightarrow{BO}$, $B' \notin \overline{BO}$

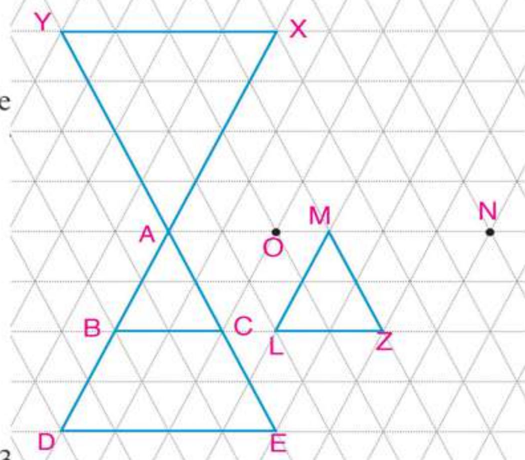
$C' \in \overrightarrow{CO}$, $C' \notin \overline{CO}$

où $A'B' = |-\frac{1}{2}|\ AB = \frac{1}{2}\ AB$

$B'C' = |-\frac{1}{2}|\ BC = \frac{1}{2}\ BC$

$C'A' = |-\frac{1}{2}|\ CA = \frac{1}{2}\ CA$




**Découvre**

**4** Sur le papier triangulé ci-contre, découvre le centre et le rapport d'homothétie qui rend:

**A** $\triangle$ ABC image de $\triangle$ ADE

**B** $\triangle$ MZL image de $\triangle$ AED

**C** $\triangle$ AXY image de $\triangle$ ABC

**D** $\triangle$ MZL image de $\triangle$ AYX

**E** $\triangle$ AED image de $\triangle$ AYX

**5** Soit ABCD un rectangle de dimensions 2 et 3

**A** tés de longueur.

Calcule les dimensions du rectangle A'B'C'D' l'image du rectangle ABCD par l'homothétie de rapport k.

**B** Calcule le rapport $\frac{\text{A (rectangle A' B' C' D')}}{\text{A (rectangle AB CD)}}$ Que remarques-tu?

**Tu as peut-être remarqué que :** L'aire de l'image d'une figure par une homothétie de rapport $k = k^2 \times$ l'aire de la figure d'origine

Si l'aire d'un polygone est $245\ cm^2$, calcule le coefficient de l'homothétie sachant que l'aire de son image par l'homothétie est :

**A** $980cm^2$ **B** $5cm^2$ **C** $180cm^2$

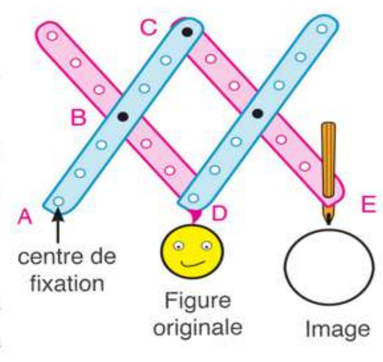
**Fabrique toi-même** **Pantographe**

**Matériel :** 4 règles graduées – perceuse – visses – crayon – clou à bout pointu

**Etapes :** **1-** Perce les règles dans les lieux de graduation puis fixe les visses, le clou à bout pointu et le crayon comme l'indique la figure.

**2-** Fait bouger le pantographe pour rendre $\frac{AC}{AB} = k$

**3-** en déplaçant le bout D sur la figure originale, le bout E dessine son image par une homothétie de rapport k.



# Résumé de l'unité

### Polygones semblables

Deux polygones ayant le même nombre de côtés sont semblables si leurs angles correspondants sont superposables et leurs côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

### Rapport de similitude

Si polygone A'B'C'D' ~ polygone ABCD et si k est le rapport de similitude,
alors $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = k$ où $k \neq 0$
Le rapport entre les périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude.

### Rectangle d'or

C'est un rectangle dont la longueur est inférieure au double de la largeur et qu'on peut partager en un carré et un rectangle semblable au rectangle d'origine.

### Rapport d'or

Le rapport entre la longueur d'un rectangle d'or et sa largeur est environ 1,618 : 1

**Axiome :** C'est une proposition mathématique considérée comme évidente en soi, sans démonstration, sur laquelle d'autres connaissances peuvent être construites dans un modèle. Par exemple :
« Deux triangles ayant deux paires d'angles correspondants superposables sont semblables ».

**Corollaire (1):** Si une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés ou les droites qui les contiennent, alors le triangle formé est semblable au triangle initial.

**Corollaire (2):** La perpendiculaire issue du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles semblables et chacun des deux triangles obtenus est semblable au triangle initial.

**Théorème 1:** Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.

**Théorème 2:** Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables.

### Relation entre les aires de deux polygones semblables :

**Théorème 3:** Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.

**Corollaire :** Deux polygones semblables peuvent être partagés en un même nombre de triangles deux à deux semblables.

**Théorème 4:** Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.



Le temple de Hatshepsout à Louxor

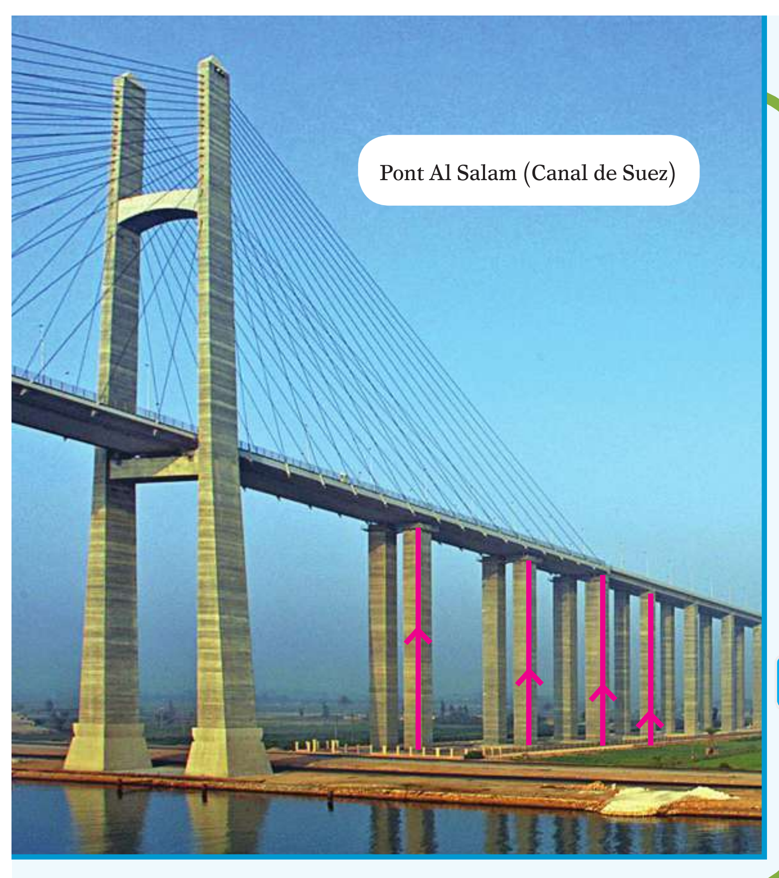
## Objectifs de l'unité

**Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :**

- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles » sa réciproque et ses corollaires.
- Identifier et démontrer le théorème de Thalès d'énoncé « Des parallèles découpent sur deux droites des segments de longueurs proportionnelles » et ses cas particuliers
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé «La bissectrice intérieure (ou extérieure) d'un angle d'un triangle partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle» et ses cas particuliers.
- Déterminer la puissance d'un point par rapport à un cercle (sécantes et tangentes)
- Déterminer les mesures des angles formés par l'intersection des cordes et de tangentes d'un cercle.
- Résoudre des exercices portant sur la détermination de la longueur d'une bissectrice intérieure ou extérieure.

## Expressions de base

- Rapport
- Proportion
- Parallèle
- Milieu
- Médiane
- Sécante
- Bissectrice
- Bissectrice intérieure
- Bissectrice extérieure
- Perpendiculaire à




## Leçons de l'unité

**Leçon (3 - 1):** Droites parallèles et parties proportionnelles.

**Leçon (3 - 2):** Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles.

**Leçon (3 - 3):** Applications de la proportionnalité dans un cercle.

## Matériel utilisé

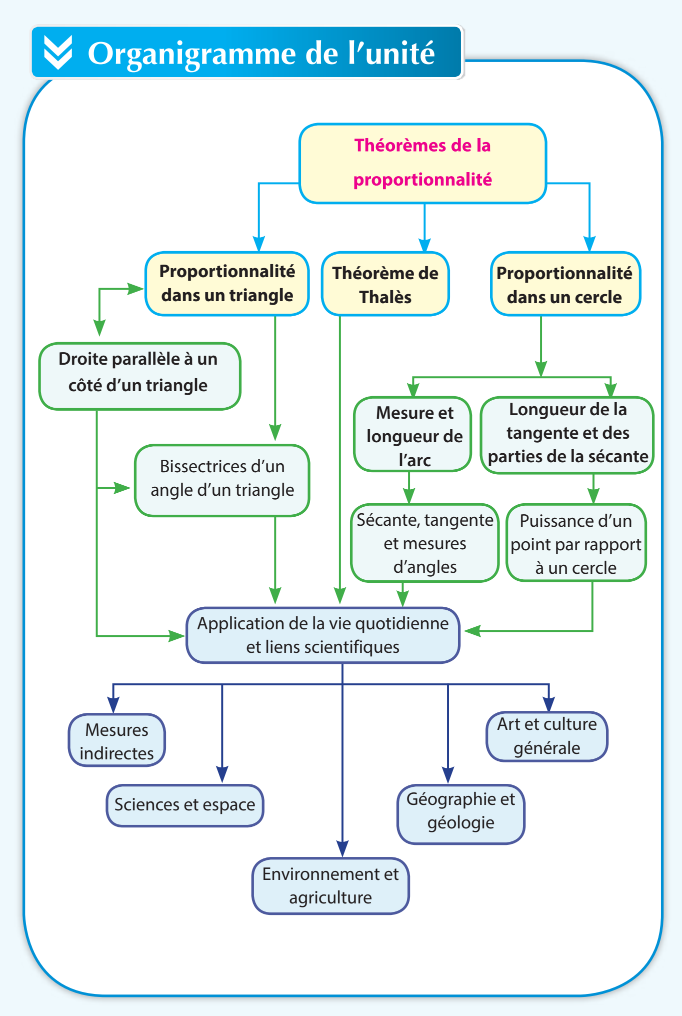
Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer – Une calculatrice – Logiciels – Vidéo Projecteur – Papiers quadrillés – Fil – Paire de ciseau

## Historique

La mathématique est une activité intellectuelle plaisante qui ouvre et éveille l'esprit. Elle contribue à résoudre des problèmes quotidiens et des défis scientifiques en les représentant et en les modélisant à l'aide du langage mathématique et ses symboles pour les résoudre avant de les remettre dans leurs contextes matériels.

Les Anciens Égyptiens se sont rendu compte de cela et ils ont construit les temples et les pyramides selon des lignes droites, les unes parallèles et les autres qui les coupent. Ils ont labouré les terres agricoles en lignes droites parallèles. Les Grecs ont emprunté la géométrie des Anciens Égyptiens et Euclide (300 av. J.-C) a construit un système géométrique complet. C'est la géométrie euclidienne. Cette géométrie est basée sur cinq axiomes dont le plus important est : l'axiome du parallélisme « Par un point extérieur à une droite donnée, ne passe qu'une unique droite qui lui est parallèle ». La géométrie euclidienne traite des formes planes (triangles, polygones, cercles) et des solides. Elle a aussi des applications dans différents domaines : construction de routes, de ponts, urbanisme, élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et les lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan (L'échelle).

## Organigramme de l'unité



# 3 - 1 Droites parallèles et parties proportionnelles

## A apprendre

- Propriétés d'une droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle.
- Utilisation de la proportionnalité pour calculer des longueurs de segments déterminés par des droites parallèles et des sécantes.
- Modélisation et résolution de problèmes de la vie quotidienne incluant des droites parallèles et leurs sécantes.




**1-** Trace un triangle ABC, Détermine un point $D \in \overline{AB}$ puis trace $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E.

**2-** Mesure les longueurs de :
$\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ et $\overline{EC}$

**3-** Calcule les rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$, puis compare-les. Que remarques-tu ?

Si on change la position de $\overleftrightarrow{DE}$ en gardant le parallélisme avec $\overline{BC}$, la relation entre $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$ va-t-elle changer ? Que peux-tu conclure ?



## Expressions de base



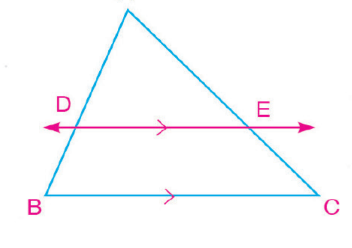
- Parallèle
- Milieu
- Médiane
- Sécante

**Théorème 1**

**Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles.**

**Hypothèses :** ABC est un triangle et $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

**Conclusion :** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$




**Démonstration :** $\because \overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (Axiome)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (1)

$\because D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$

$\therefore AB = AD + DB$ et $AC = AE + EC$ (2)

De (1) et (2) on obtient :

$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$

D'où : $\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ propriété de la proportionnalité (Ce qu'il fallait démontrer)

## Matériel et moyens

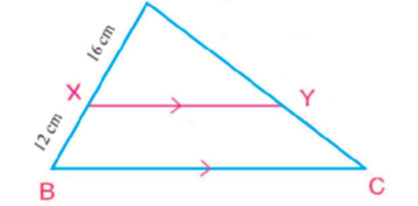
- Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer
- Ordinateur
- Logiciels
- Vidéo projecteur

**Remarque que:**

$\because \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ $\qquad\qquad \therefore \frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC}$

**Donc** $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

**Exemple**




**1** **Dans la figure ci-contre,** $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, AX = 16cm, BX = 12cm.

**A** Si AY = 24cm, trouve YC.

**B** Si CY = 21cm, trouve AC.

**Solution**

**A** $\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\qquad \therefore \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$

et $\frac{16}{12} = \frac{24}{YC}$ $\qquad \therefore YC = \frac{12 \times 24}{16} = 18$cm.

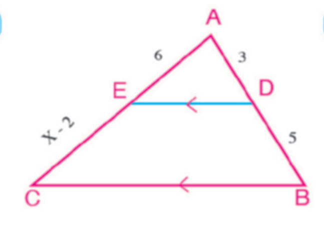
**B** $\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\qquad \therefore \frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CY}$

et $\frac{16 + 12}{12} = \frac{AC}{21}$ $\qquad \therefore AC = \frac{28 \times 21}{12} = 49$cm.

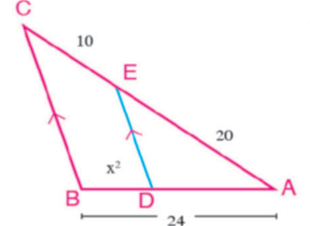
**Essaie de résoudre**

**1** Dans chacune des figures suivantes, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Trouve la valeur numérique de x (les longueurs sont mesurées en centimètres)

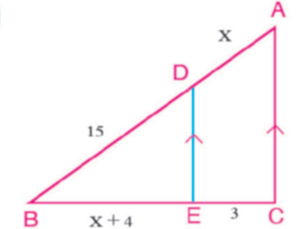







**C**

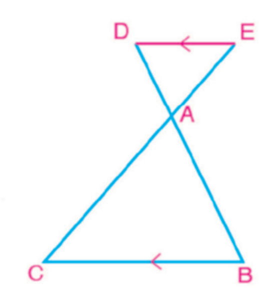


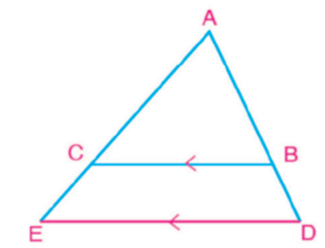



**Corollaire** **Si une droite extérieure au triangle ABC, parallèle au côté $\overline{BC}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ en D et E respectivement (voir la figure), alors : $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CE}$.**

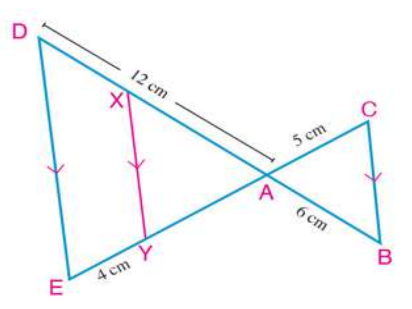
D'après les propriétés des proportions :

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE}$



**Exemple**




**2** **Dans la figure ci-contre,** $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{A\}$, $X \in \overline{AD}$ et $Y \in \overline{AE}$ où $\overline{XY} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{DE}$.

Si AB = 6cm, AC = 5cm, AD = 12cm, EY = 4cm.

trouve la longueur de $\overline{AE}$ et $\overline{DX}$.

**Solution**

$\because \overline{ED} \parallel \overline{BC}$ , $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{A\}$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ d'où $\frac{12}{6} = \frac{AE}{5}$ $\therefore AE = 10cm$

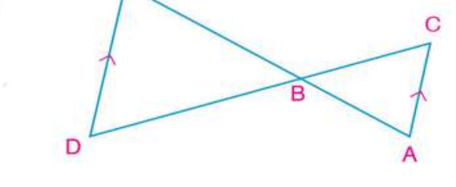
Dans le triangle AED:

$\because \overline{XY} \parallel \overline{ED}$ $\therefore \frac{AE}{EY} = \frac{AD}{DX}$

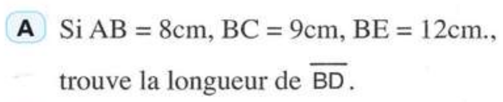
d'où $\frac{10}{4} = \frac{12}{DX}$ $\therefore DX = 4.8cm$

## Essaie de résoudre

**2** **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ , $\overline{AE} \cap \overline{CD} = \{B\}$




**A** Si AB = 8cm, BC = 9cm, BE = 12cm.,



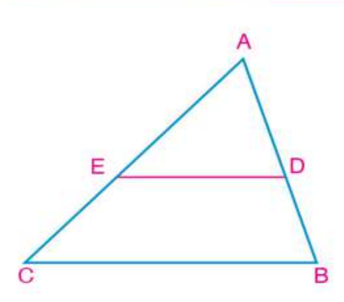
trouve la longueur de $\overline{BD}$.

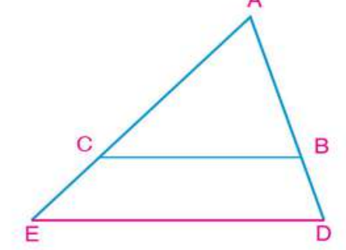
**B** Si AB = 6cm, BE = 9cm, CD = 18cm.,

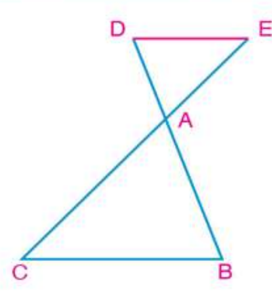
trouve la longueur de $\overline{BC}$.




**Si une droite coupant deux côtés d'un triangle les partage en segments de longueurs proportionnelles, alors cette droite est parallèle au troisième côté du triangle.**




**Dans les trois figures précédentes,** ABC est un triangle. $\overleftrightarrow{DE}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ en D et $\overleftrightarrow{AC}$ en E,

$$\text{Si } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ alors } \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$$

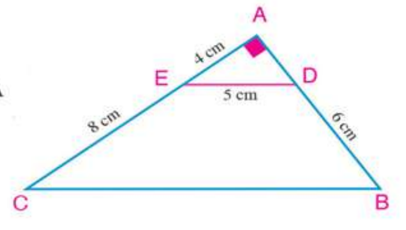
### Réflexion logique :

Est-ce que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$? Pourquoi ?

- Est-ce que $\angle ADE \equiv \angle B$ ? Explique ta réponse.

Démontre la réciproque du théorème.

**Exemple**




**3** **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle en A

**A** Démontre que : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

**B** Trouve la longueur de $\overline{BC}$.

**Solution**

**A** $\because$ le triangle ADE est rectangle en A

$\therefore AD = \sqrt{25 - 16} = 3cm$ (Théorème de Pythagore)

$\because \frac{AD}{DB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ d'où $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

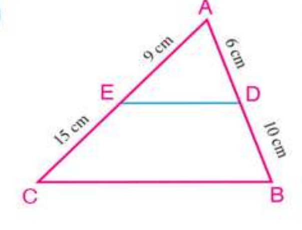
**B** $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (Pourquoi ?) $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$

d'où $\frac{5}{BC} = \frac{1}{3}$ $\therefore BC = 15cm$

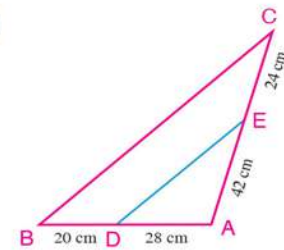
**Essaie de résoudre**

**3** Dans chacune des figures suivantes, détermine si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ou non ?

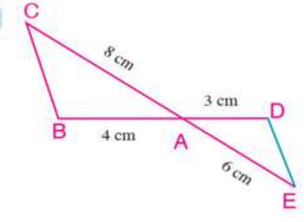
**A**




**B**




**C**

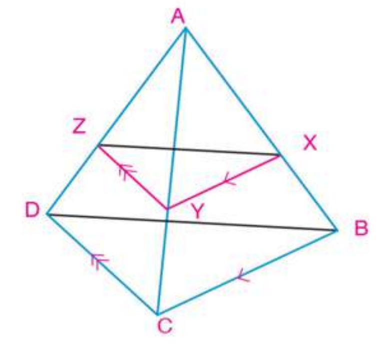



**Exemple**

**4** ABCD est un quadrilatère $X \in \overline{AB}$ et $Y \in \overline{AC}$ tels que $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$,

On trace $\overrightarrow{YZ} \parallel \overline{CD}$ qui coupe $\overline{AD}$ en Z. Démontre que $\overline{XZ} \parallel \overline{BD}$.

**Solution**




Dans le triangle ABC :

$\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\therefore \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ (1)

Dans le triangle ADC :

$\because \overline{YZ} \parallel \overline{CD}$ $\therefore \frac{AZ}{ZD} = \frac{AY}{YC}$ (2)

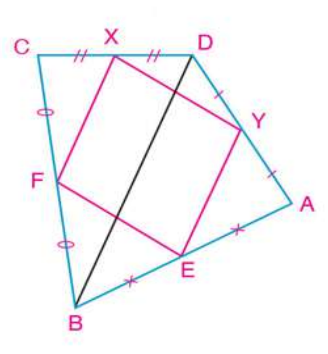
De (1) et (2) on a : $\frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZD}$

Dans le triangle ABD :

$\because \frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZD}$ $\therefore \overline{XZ} \parallel \overline{BD}$

### Essaie de résoudre

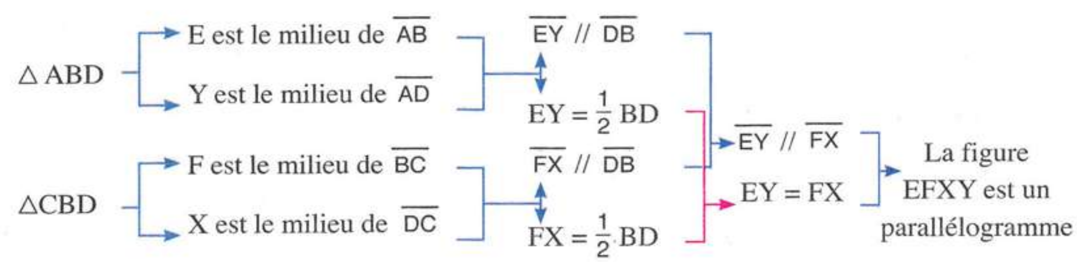
**4** Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en M. On trace $\overrightarrow{ME} \parallel \overline{AD}$ qui coupe $\overline{AB}$ en E. On trace $\overrightarrow{MF} \parallel \overline{DC}$ qui coupe $\overline{BC}$ en F. Démontre que : $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$




**Réflexion logique :** Soit ABCD un quadrilatère. E, F, X et Y sont respectivement les milieux des côtés $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ , $\overline{CD}$ et $\overline{DA}$ . La figure EFXY est-il un parallélogramme ?.

**Pour comprendre :** Quelle est la conclusion ? Comment peut-on identifier qu'une figure est un parallélogramme ?

**Pour planifier :** Trace $\overline{BD}$ qui partage le quadrilatère ABCD en deux triangles.

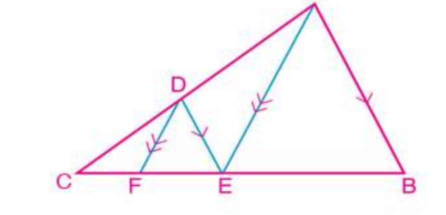



**Pour résoudre :** Écris les expressions mathématiques convenables pour la démonstration en les justifiant.

**Pour vérifier :** A - t - on $\overline{EF} \parallel \overline{XY}$ ? Explique ta réponse.



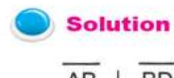
### Essaie de résoudre




**5** **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle , $D \in \overline{AC}$,

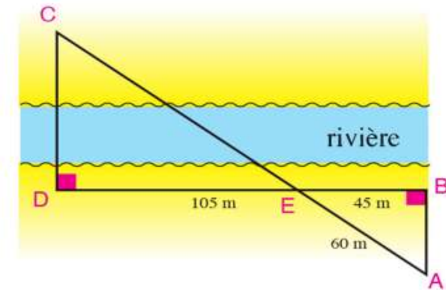
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ et $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$

Dessine un diagramme qui illustre comment démontrer que $(CE)^2 = CF \times CB$.



**Exemple**

**5** **GPS:** Pour déterminer le lieu C,
les géomètres ont mesuré et préparé le schéma ci-contre.
Calcule la distance entre les deux lieux C et A




**Solution**

$\overline{AB} \perp \overline{BD}$ , $\overline{CD} \perp \overline{BD}$ $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

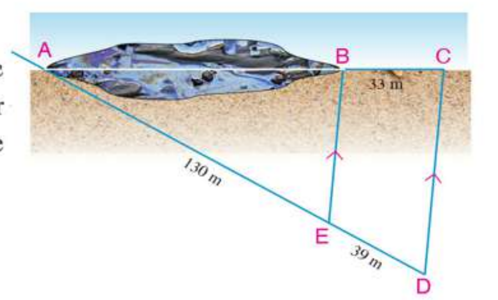
$\because \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$ , $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\therefore \frac{EA}{AC} = \frac{EB}{BD}$ Donc $\frac{60}{AC} = \frac{45}{45 + 105}$

$\therefore AC = \frac{60 \times 150}{45} = 200$ mètres.

### Essaie de résoudre

**6** **Lutter contre la pollution :** Une équipe de lutte contre la pollution a localisé une nappe de pétrole sur une plage comme l'indique la figure ci-contre. Calcule la longueur de la nappe.







Tu as peut être remarqué la possibilité d'utiliser le parallélisme d'une droite à l'un des côtés d'un triangle dans des applications de la vie quotidienne. La figure ci-contre montre le portail d'une pépinière formée par des morceaux de bois parallèles et d'autres qui lui sont sécantes.
Y a-t-il une relation entre les longueurs des parties déterminées sur les sécantes de ces morceaux parallèles ?

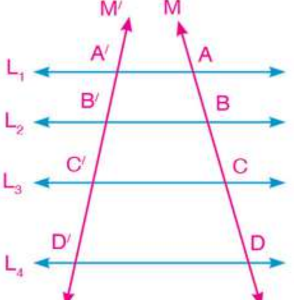


### Modélisation

Pour chercher l'existence d'une relation, modélise le problème (pose un modèle mathématique du problème) comme suit :

**1-** Trace les droites $L_1$ , $L_2$ , $L_3$ , $L_4$ , M, M` telles que $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$ puis trace les deux droites M et M` qui coupent les droites parallèles en A, B, C, D, A`, B`, C`, D`
respectivement comme l'indique la figure ci-contre.

**2-** Mesure les longueurs des segments, puis compare les rapports suivants :
$\frac{AB}{A`B`}$ , $\frac{BC}{B`C`}$ , $\frac{CD}{C`D`}$ , $\frac{AC}{A`C`}$ , ...
Que peux-tu déduire ?




### Théorème de Thalès

**Théorème 2** **Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles.**

**Hypothèses :** $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$ et M et M` sont deux droites qui les coupent

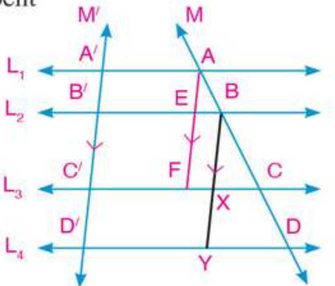
**Conclusion :** AB : BC : CD = A`B` : B`C` : C`D`

**Démonstration :** Trace $\overrightarrow{AF}$ // M` qui coupe $L_2$ en E et $L_3$ en F

Trace $\overrightarrow{BY}$ // M` qui coupe $L_3$ en X et $L_4$ en Y

∵ $\overline{AA`}$ // $\overline{EB`}$ , $\overline{AE}$ // $\overline{A`B`}$

∴ AEB`A` est un parallélogramme d'où AE = A`B`



De même : $EF = B`C`$ , $BX = B`C`$ , $XY = C`D`$

Dans le triangle ACF:

$\because \overline{BE} // \overline{CF}$ $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF}$

Donc : $\frac{AB}{BC} = \frac{A`B`}{B`C`}$ , $\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`}$ (permutation des moyens) (1)

De même, dans le triangle BDY:

$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{B`C`}{C`D`}$ , $\frac{BC}{B`C`} = \frac{CD}{C`D`}$ (permutation des moyens) (2)

De (1) et (2), on obtient :

$$\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`} = \frac{CD}{C`D`}$$

$\therefore AB : BC : CD = A`B` : B`C` : C`D`$ Ce qu'il fallait démontrer.

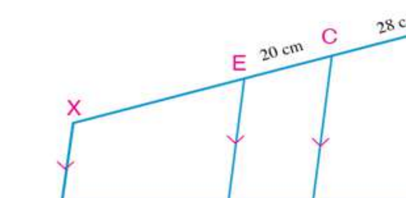
## Essaie de résoudre

**7** Dans la figure précédente, écris ce que vaut chacun des rapports suivants :

**A** $\frac{AC}{CD}$ **B** $\frac{AC}{CB}$ **C** $\frac{BD}{DA}$ **D** $\frac{A`D`}{A`B`}$ **E** $\frac{AB}{A`B`}$

## Exemple

**6** **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF} // \overline{XY}$,
$AC = 28cm$, $CE = 20cm$, $DF = 15cm$, $FY = 33cm$.
Trouve la longueur de : $\overline{BD}$ et $\overline{EX}$



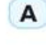

**Solution**

$\because \overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF} // \overline{XY}$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} = \frac{EX}{FY}$$

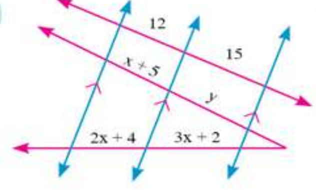
$$\frac{28}{BD} = \frac{20}{15} = \frac{EX}{33}$$

$\therefore BD = 21cm$ , $EX = 44cm$.

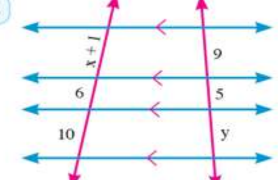
##  Essaie de résoudre

**8** Dans chacune des figures suivantes, les droites rouges coupent des droites parallèles. Calcule la valeur numérique de x et y. (Les longueurs sont mesurées en centimètres) :

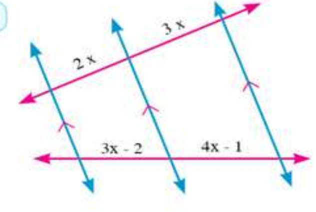
**A**




**B**




**C**



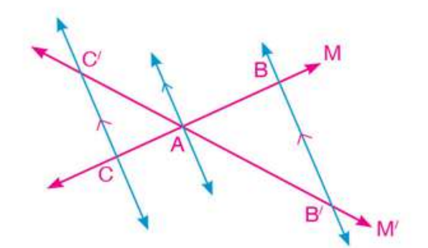
## Cas particuliers

**1-** Si les droites M et M` se coupent en A

et si $\overleftrightarrow{BB`}$ // $\overleftrightarrow{CC`}$ , alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AB`}{AC`}$

Et réciproquement si : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB`}{AC`}$

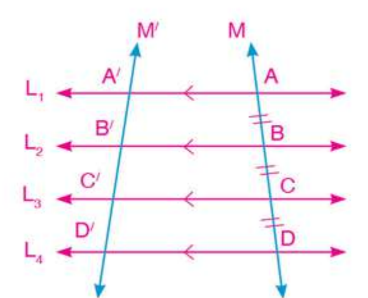
alors : $\overleftrightarrow{BB`}$ // $\overleftrightarrow{CC`}$




## Cas particulier du théorème de Thalès

**2-** Si des droites parallèles partagent une droite en segments de même longueur, alors elles partagent toute autre droite en segments de même longueur.

**Dans la figure ci-contre,** $L_1$ // $L_2$ // $L_3$ // $L_4$ et les droites M et M` les coupent. Si AB = BC = CD , alors A`B` = B`C` = C`D`




**Exemple**

**7** **Dans la figure ci-contre , trouve la valeur numérique de x et y.**

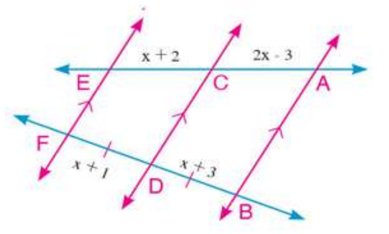
**Solution**

∵ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ // $\overline{EF}$ , BD = DF

∴ AC = CE

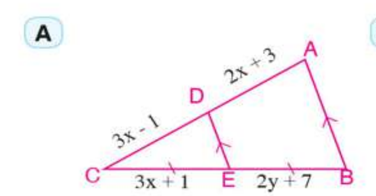
Donc: 2x - 3 = x + 2   ∴ x = 5

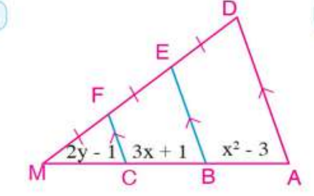
∵ BD = DF , x = 5   ∴ y + 3 = 5 + 1   ∴ y = 3

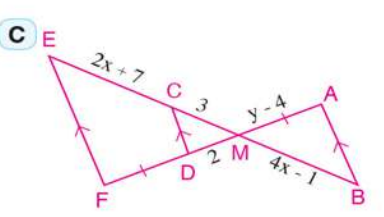



**Essaie de résoudre**

**9** Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x et y. (Les longueurs sont mesurées en centimètres)




**Réfléchis**

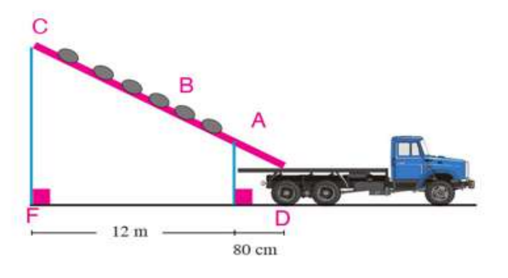
Youssef voulait partager une bande de papier en trois parties de même longueur. Il a posé la bande sur une feuille de son cahier comme l'indique la figure ci-contre, puis il a déterminé les deux points de partage A et B.

Youssef a-t-il bien partagé la bande ? Explique ta réponse.

Utilise tes instruments géométriques pour vérifier ta réponse.

**Exemple**

**8** **Lien avec l'industrie :** On déplace les emballages d'engrais de la production d'une usine en les faisant glisser à travers un tube oblique pour que les camions les transportent aux centres de distribution comme l'indique la figure ci-contre.




Si D, E et F sont respectivement les projections de A, B et C sur le sol, et si AB = 1,2m, D E = 80cm et EF = 12m, Trouver la longueur du tube à un mètre près.

**Solution**

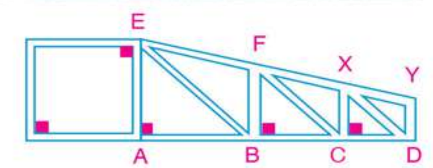
$\because$ D, E et F sont les projections de A, B et C sur l'horizontale, $\therefore \overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$

$\because \overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$ , $\overleftrightarrow{AC}$ , $\overleftrightarrow{DF}$ sont sécantes, $\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ : $\frac{AC}{1,2} = \frac{12 + 0,8}{0,8}$

Donc $\therefore AC = \frac{1,2 \times 12,8}{0,8} = 19,2$ m $\therefore AC \simeq 19$ m

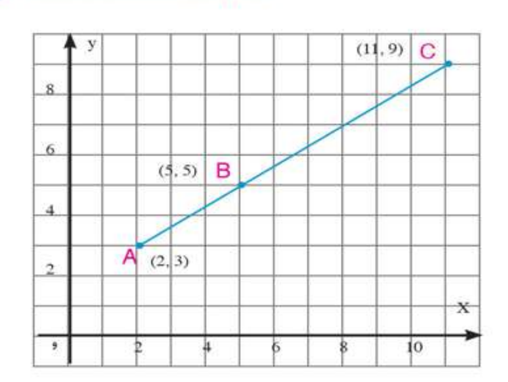
**Essaie de résoudre**

**10** **A** **Lien avec les constructions :**




Si AB = 180cm, EF = 2m
AB : BC : CD = 5 : 4 : 3
Trouve la longueur de $\overline{EY}$,et $\overline{CD}$

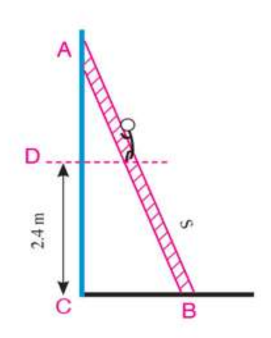
**B** **Réflexion critique**




Dans la figure, calcule $\frac{AB}{BC}$ de différentes manières.
As-tu obtenu le même résultat ?

**Test de compréhension**

**Résolution de problèmes :** Une échelle AB de longueur 4,1 mètres repose par son extrémité A sur un mur vertical et par son extrémité B sur un sol horizontal rugueux. Si la distance entre l'extrémité B et le mur est 90 cm, calcule la distance qu'un homme doit monter sur l'échelle pour qu'il soit à une hauteur de 2,4 mètres du sol.



# Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles

# 3 - 2

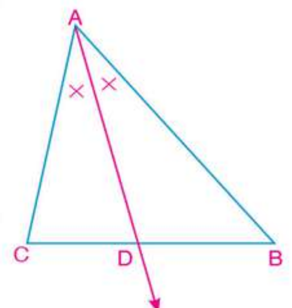



**1-** Trace un triangle ABC, puis trace $\overrightarrow{AD}$ la bissectrice de l'angle A qui coupe $\overline{BC}$ en D.

**2-** Mesure $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

**3-** Calcule les rapports $\frac{BD}{DC}$ et $\frac{BA}{AC}$, puis compare-les. Que remarques-tu ?

**4-** Répète les étapes précédentes plusieurs fois. Qu'est ce que tu en déduis ? Exprime le résultat à ta manière.




### A apprendre

- Propriétés des bissectrices des angles d'un triangle.
- Utilisation de la proportionnalité pour calculer les longueurs des segments issus de la bissection des angles.
- Modélisation et résolution de problèmes de la vie quotidienne incluant des bissectrices d'angle d'un triangle.

## Bissectrice d'un angle

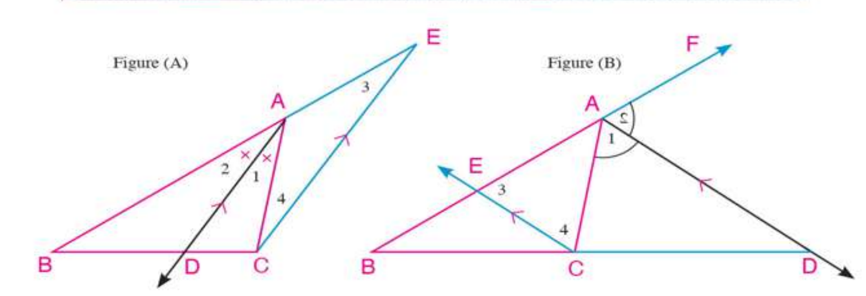
**Théorème 3**

**La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle (ou la bissectrice de l'angle extérieure au triangle en ce sommet) partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle.**



### Expressions de base

- Bissectrice
- Bissectrice intérieure
- Bissectrice extérieure
- Perpendiculaire



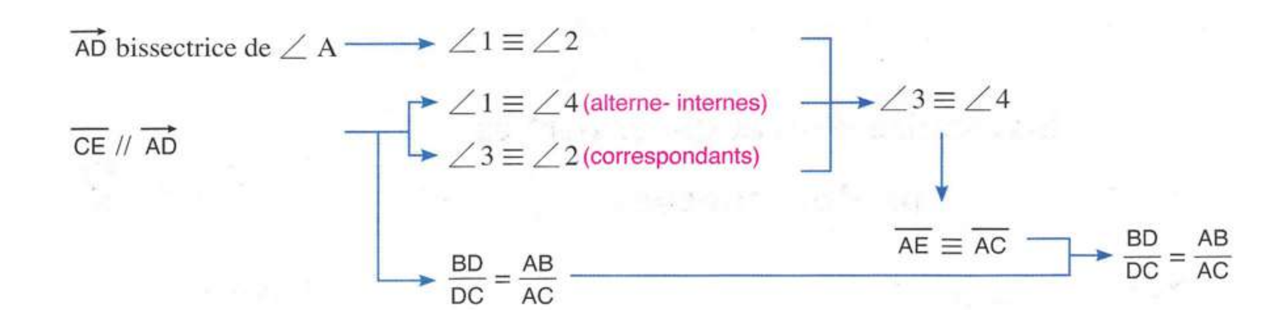

**Hypothèses :** ABC est un triangle et $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle BAC$ (fig (A) $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de l'angle, extérieure au sommet A fig (B))

**Conclusion :** $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

**Démonstration :** On trace $\overrightarrow{CE}$ // $\overleftrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BA}$ en E. Suis le schéma suivant et rédige la démonstration.

### Matériel et moyens

- Instruments géométriques pour tracer
- Ordinateur et logiciels
- Vidéo projecteur




**Exemple**

**1** ABC est un triangle tel que AB = 8cm , AC = 6cm et BC = 7cm , On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle$BAC qui coupe $\overline{BC}$ en D. Trouve la longueur de $\overline{DB}$ et $\overline{DC}$

**Solution**

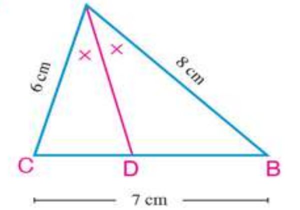
$\because$ $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$ BAC $\quad \therefore \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (théorème)

$\because$ AB = 8cm, A C = 6cm $\quad \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\because$ BC = BD + DC = 7cm $\quad \therefore \frac{DB}{7 - BD} = \frac{4}{3}$

3BD = 28 - 4 BD (double produit)

7BD = 28 $\quad \therefore$ BD = 4cm , CD = 3cm

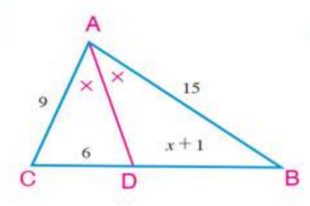




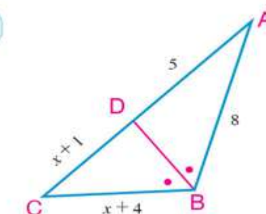

**Essaie de résoudre**

**1** Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x (Les longueurs sont mesurées en centimètres)

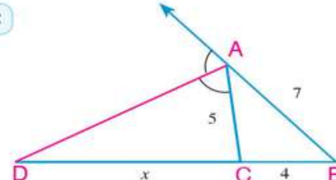
**A**




**B**




**C**




**Exemple**

**2** Soit ABC un triangle. $\overrightarrow{DB}$ est une bissectrice de $\angle$B qui coupe $\overline{AC}$ en D, où AD = 14cm, AC = 6 cm et DC = 18cm. Si le périmètre du triangle ABC = 80cm, trouve la longueur de : $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

**Solution**

Dans le triangle ABC

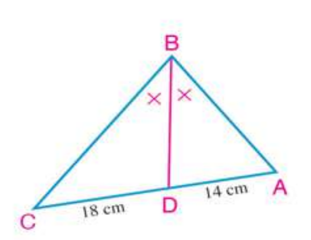
$\because$ $\overrightarrow{BD}$ est une bissectrice de $\angle$B

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

$\because$ le périmètre du triangle ABC = 80cm, AC = 14 + 18 = 32cm

$\therefore$ AB + BC = 80 - 32 = 48cm



$\because \frac{AB}{BC} = \frac{7}{9}$ $\therefore \frac{AB + BC}{BC} = \frac{7 + 9}{9}$ (propriété de la proportionnalité)

Donc $\frac{48}{BC} = \frac{16}{9}$ $\therefore BC = 27cm$ , $AB = 21cm$

## Essaie de résoudre

**2** Soit ABC un triangle rectangle en B. On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle A$, qui coupe $\overline{BC}$ en D. Si la longueur de $\overline{BD}$ = 24cm, BA : AC = 3 : 5 , trouve le périmètre du triangle ABC.

## Remarques importantes

**1-** Dans un triangle ABC où $AB \neq AC$.

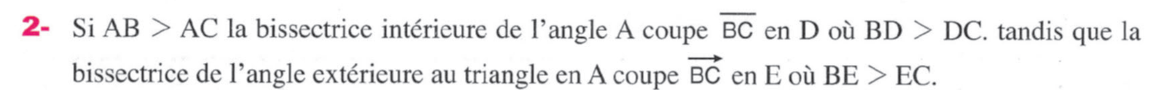
si $\overrightarrow{AD}$ est la bissectrice de $\angle BAC$,

et si $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de l'angle extérieur au triangle en A.

**alors :** $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ , $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

**d'où** $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{EC}$

Donc $\overline{BC}$ est partagé intérieurement et extérieurement dans un même rapport et les deux bissectrices dans ce cas sont perpendiculaires. (Pourquoi ?)



**2-** Si AB > AC la bissectrice intérieure de l'angle A coupe $\overline{BC}$ en D où BD > DC. tandis que la bissectrice de l'angle extérieure au triangle en A coupe $\overrightarrow{BC}$ en E où BE > EC.

## Réflexion critique

- Si AC augmente, que se passe-t-il pour le point D ?
- Si AC = AB , où se trouve le point D ? Quelle est la position de $\overrightarrow{AE}$ par rapport à $\overline{BC}$ dans ce cas ?
- Si AC > AB, quelle est la relation entre DC et DB ? Où se trouve le point E dans ce cas ? Compare ta réponse avec les réponses de tes camarades

## Exemple

**3** Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm, AC = 4 cm et BC = 5cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice intérieure de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en D, Trace $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de l'angle extérieure au triangle A qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Calcule la longueur de $\overline{DE}$.



**Solution**

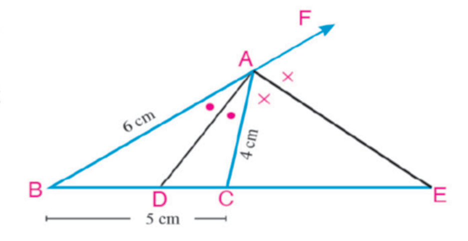
$\because$ $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle A$ et $\overrightarrow{AE}$ est une de l'angle bissectrice extérieure au triangle en $\angle A$.

$\therefore$ D et E partagent $\overline{BC}$ intérieurement et extérieurement dans un même rapport.

Donc : $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\because BC = BD + DC = 5$ , $BE - EC = BC = 5$



D'après les propriétés de la proportionnalité, on obtient

$\frac{BD + DC}{DC} = \frac{3+2}{2}$ $\qquad \frac{5}{DC} = \frac{5}{2} \quad \therefore DC = 2$

$\frac{BE - EC}{EC} = \frac{3-2}{2}$ $\qquad \frac{5}{EC} = \frac{1}{2} \quad \therefore EC = 10$

Donc on obtient DE = DC + CE $\qquad$ DE = 2 + 10 = 12cm

**Essaie de résoudre**

**3** Soit ABC un triangle tel que AB = 3cm, BC = 7cm et CA = 6cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice intérieure de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en D, Trace $\overline{AE}$ bissectrice de l'angle extérieure de $\angle A$ qui coupe $\overrightarrow{CB}$ en E.

**A** Démontre que $\overline{AB}$ est une médiane dans le triangle ACE.

**B** Trouve le rapport entre l'aire du triangle ADE et l'aire du triangle ACE.

## Calcul de la longueur de la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle

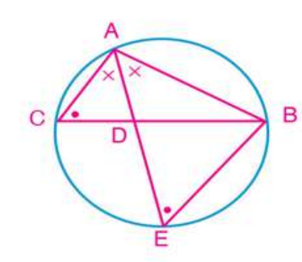



**Si $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle A$ dans un triangle ABC qui coupe $\overline{BC}$ en D alors : $AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$**

**Hypothèses :** ABC est un triangle et $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle$ BAC et $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$

**Conclusion :** $(AD)^2 = AB \times AC - BD \times DC$

**Démonstration :** On trace un cercle passant par les sommets du triangle ABC qui coupe $\overrightarrow{AD}$ en E, puis on trace $\overline{BE}$




On a $\triangle ACD \sim \triangle AEB$ (pourquoi)? d'où $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$

$\therefore AD \times AE = AB \times AC$

$AD \times (AD + DE) = AB \times AC$

$(AD)^2 = AB \times AC - AD \times DE$

$(AD)^2 = AB \times AC - BD \times DC$

Donc $AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

**Rappel**

$AD \times DE = BD \times DC$

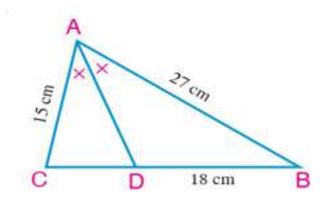
**Exemple**

**4** Soit ABC un triangle tel que AB = 27cm et AC = 15cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en D. Si BD = 18cm, calcule la longueur de $\overline{AD}$.

**Solution**

$\because \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle BAC \quad \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

D'où $\frac{18}{DC} = \frac{27}{15}$ $\qquad \therefore DC = 10cm$

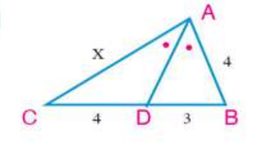


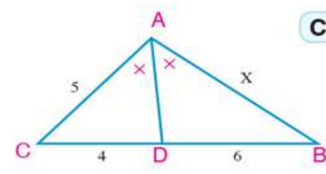

$\because AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

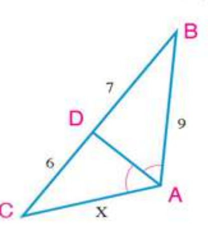
$\therefore AD = \sqrt{27 \times 15 - 18 \times 10} = \sqrt{225} = 15$ cm

### Essaie de résoudre

**4** Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur de x et la longueur de $\overline{AD}$ (Les longueurs sont mesurées en centimètres) :

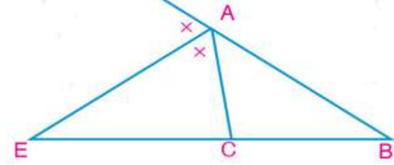
**A** 


**B** 


**C** 

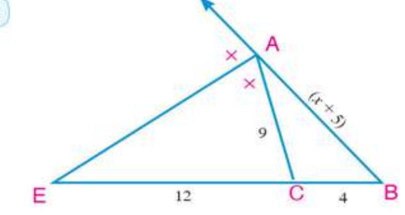

**Remarque que:** Dans la figure ci-contre, $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de l'angle extérieure de $\angle$ BAC qui coupe $\overleftrightarrow{BC}$ en E. Donc :

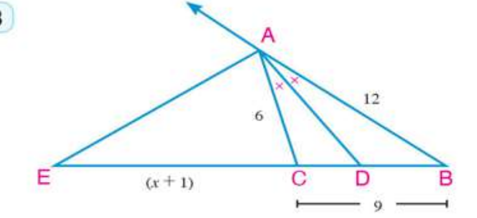
$AE = \sqrt{BE \times EC - AB \times AC}$




### Essaie de résoudre

**5** Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur de x et la longueur de $\overline{AE}$ (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

**A** 


**B** 

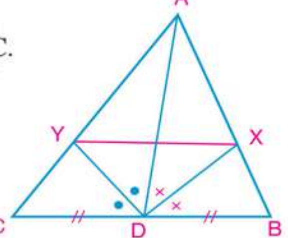

### Exemple

**5** **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AD}$ est une médiane dans le triangle ABC.

$\overrightarrow{DX}$ est une bissectrice de $\angle$ADB. qui coupe $\overline{AB}$ en X.

$\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de $\angle$ADC qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

Démontre que : $\overline{XY} // \overline{BC}$.




**Solution**

Dans le triangle ADB: $\because$ $\overrightarrow{DX}$ est une bissectrice de $\angle$ADB $\quad \therefore \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AX}{XB}$ (1)

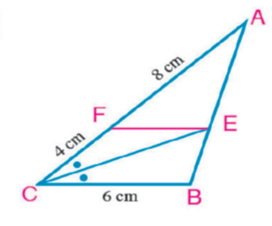
Dans le triangle ADC: $\because$ $\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de $\angle$ADC $\quad \therefore \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AY}{YC}$ (2)

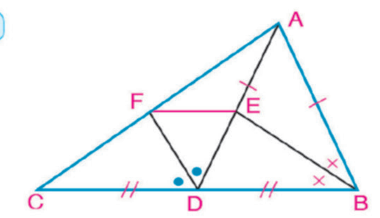
Dans le triangle ABC: $\because$ $\overline{AD}$ est une médiane $\quad \therefore$ DB = DC (3)

De (1), (2) et (3), $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$ $\quad$ d'où $\overline{XY} // \overline{BC}$.

 Essaie de résoudre

6) Dans chacune des figures suivantes, démontre que : $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$



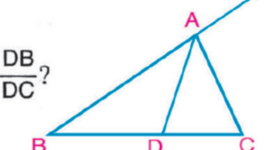




**Réflexion logique**

**Dans la figure ci-contre,** D ∈ $\overline{BC}$.

Comment peut-on tracer $\overrightarrow{CE}$ qui coupe $\overrightarrow{BA}$ en E pour calculer le rapport $\frac{DB}{DC}$?

Si $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$, que peux-tu conclure ?




## Cas particuliers

**1-** Dans le triangle ABC:

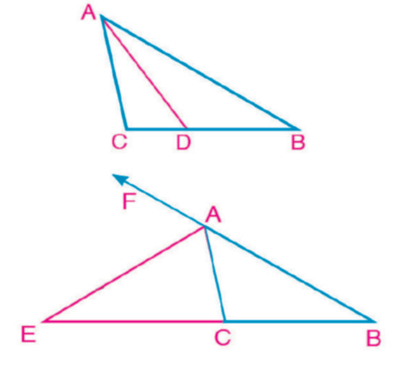
**Si** D ∈ $\overline{BC}$ où $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

**alors :** $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de ∠ BAC

**Si** E ∈ $\overrightarrow{BC}$ et E ∉ $\overline{BC}$ où $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

**alors:** $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de ∠ A extérieure au triangle ABC

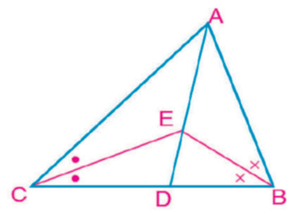
Ce cas est la réciproque du théorème précédent.




**2- Dans la figure ci-contre,**

$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont des bissectrices des angles B et C qui se coupent en E où E ∈ $\overrightarrow{AD}$. Que peux-tu conclure ?

**Corollaire : Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.**







6) Soit ABC un triangle tel que AB = 18cm, BC = 15cm et AC = 12cm, D ∈ $\overline{BC}$ où BD = 9cm, On trace $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Démontre que $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de ∠BAC, puis calcule la longueur de $\overline{CE}$.

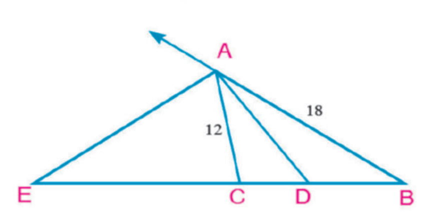
**Solution**

Dans le triangle ABC: $\frac{AB}{AC} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

CD = BC - BD = 15 - 9 = 6cm

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\because \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de ∠ BAC



$\because \overrightarrow{AE} \perp \overline{AD}$ qui coupe $\overline{BC}$ en E

$\therefore \overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de $\angle$A extérieur au triangle ABC d'où $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

$\because$ BE = BC + CE $\quad \therefore \frac{15 + CE}{CE} = \frac{18}{12}$ , $\quad$ CE = 30cm

**Essaie de résoudre**

7) Soit ABCD un quadrilatère tel que AB = 18cm et BC = 12cm. E $\in \overline{AD}$ tel que 2 AE = 3 ED. On trace $\overrightarrow{EF} // \overline{DC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en F. Démontre que $\overrightarrow{BF}$ est une bissectrice $\angle$ABC.

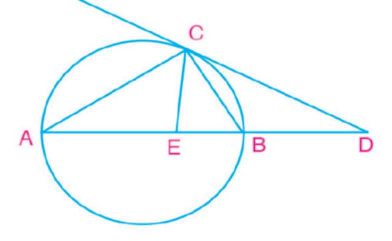
**Exemple**

7) Soit $\overline{AB}$ un diamètre dans un cercle et $\overline{AC}$ est une corde. On trace $\overrightarrow{CD}$ tangente au cercle en C qui coupe $\overrightarrow{AB}$ en D.

Si E $\in \overline{AB}$ tel que $\frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CE}$ démontre que :

**A** $\overrightarrow{AC}$ est une bissectrice de l'angle C extérieur au triangle CDE. **B** $\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BE}$

**Solution**




$\because \frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CE}$ (1)

$\therefore \overrightarrow{CB}$ est une bissectrice de $\angle$ C dans le triangle DCE.

$\because \overline{AB}$ un diamètre du cercle

$\therefore$ m ($\angle$ACB )= 90° $\quad$ Donc $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

$\because \overrightarrow{CB}$ est une bissectrice de $\angle$C dans le triangle ABC

$\therefore \overrightarrow{CA}$ est une bissectrice de $\angle$C extérieur au triangle DCE

(deux bissectrices perpendiculaires) (ce qu'il fallait démontrer en A)

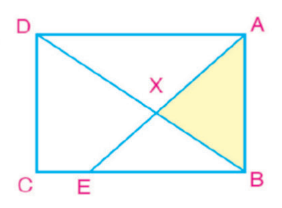
Donc $\frac{DA}{AE} = \frac{DC}{CE}$ (2)

De (1) et (2), on a : $\frac{DA}{AE} = \frac{DB}{BE}$ $\quad \therefore \frac{DA}{AE} = \frac{AE}{BE}$ (ce qu'il fallait démontrer en B)

**Essaie de résoudre**

8) Soient M et N deux cercles tangents extérieurement en A. On trace une droite parallèle à $\overline{MN}$ qui coupe le cercle M en B et C et le cercle N en D et E respectivement. Si $\overrightarrow{BM} \cap \overrightarrow{EN}$ = {F}. démontre que $\overrightarrow{AF}$ est une bissectrice de $\angle$MFN.

## Test de compréhension




**Résolution de problèmes :** **La figure ci-contre** illustre le partage d'un terrain rectangulaire en quatre parties différentes par les deux droites $\overleftrightarrow{BD}$ et $\overleftrightarrow{AE}$, où E $\in \overline{BC}$ et $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{AE}$ = {X}.

Si AB = BE = 42 mètres et AD = 56 mètres.

calcule en mètres carrés la superficie de la partie du terrain ABX et la longueur de $\overline{AX}$.

# 3 - 3 Applications de la proportionnalité dans un cercle

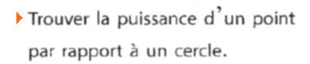


## A apprendre

- Trouver la puissance d'un point par rapport à un cercle.
- Déterminer la position d'un point par rapport à un cercle.
- Trouver les mesures des angles formés par l'intersection des cordes et des tangentes dans un cercle.
- Modéliser et résoudre des problèmes de la vie quotidienne incluant la longueur de la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle.

## Expressions de base

- Puissance d'un point
- Cercle
- Corde
- Tangente
- Sécante
- Diamètre
- Cercles concentriques
- Tangente commune extérieure
- Tangente commune intérieure.

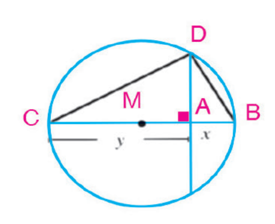


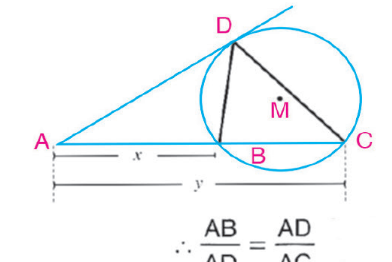
## Matériel et moyens

- Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer




Comment peut-on construire un segment dont la longueur L est une moyenne proportionnelle entre x et y les longueurs de deux segments donnés ?




$\because \triangle ADB \sim \triangle ACD$ (pourquoi ?) $\qquad \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$

d'où $\frac{x}{L} = \frac{L}{y}$ et par conséquent $L^2 = x \times y$

**Donc** L est une moyenne proportionnelle entre $x$ et $y$




Construis des segments de longueurs $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$ et $\sqrt{24}$

Compare tes constructions avec celles de tes camarades, puis vérifie tes réponses en utilisant une calculatrice et un instrument de mesure.

## 1) Puissance d'un point par rapport à un cercle




**La puissance d'un point A par rapport à un cercle M de rayon R est le nombre réel $P_M(A)$ où $P_M(A) = (AM)^2 - R^2$**

### Remarques importantes

### Remarque 1

A —— r —— M

On peut prévoir la position d'un point A par rapport à un cercle M :

Si : $P_M(A) > 0$ , le point A est situé à l'extérieur du cercle.

$P_M(A) = 0$ , le point A est situé sur le cercle.

$P_M(A) < 0$ , le point A est situé à l'intérieur du cercle.

**Exemple**

**1** Détermine la position de chacun des points A, B et C par rapport au cercle M de rayon 5cm, si : $P_M(A) = 11$ , $P_M(B) = 0$ , $P_M(C) = -16$, Calcule ensuite la distance de chaque point par rapport au centre du cercle.

**Solution**

$\because P_M(A) = 11 > 0$ $\therefore$ le point A est situé à l'extérieur du cercle

$\because P_M(A) = (AM)^2 - R^2$ $\therefore 11 = (AM)^2 - 25$ $\therefore AM = 6cm$

$\because P_M(B) = 0$ $\therefore$ le point B est situé sur le cercle $\therefore BM = 5cm$

$\because P_M(C) = -16$ $\therefore$ le point C est situé à l'intérieur du cercle.

$\because P_M(C) = (CM)^2 - R^2$ $\therefore -16 = (CM)^2 - 25$ $\therefore CM = 3cm$

## Essaie de résoudre

**1** Détermine la position de chacun des points A, B et C par rapport au cercle N de rayon 3 cm puis calcule la distance de chaque point par rapport au centre du cercle dans chacun des cas suivants:

**A** $P_N(A) = 15$ **B** $P_N(B) = 0$ **C** $P_N(C) = -4$

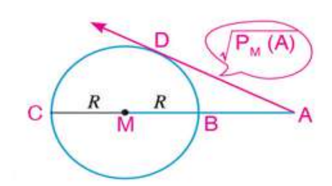
## Remarque 2

Si le point A est situé à l'extérieur du cercle M,

alors : $P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

$= (AM - R)(AM + R)$

$= AB \times AC = (AD)^2$




$\therefore$ La longueur de la tangente issue du point A au cercle M = $\sqrt{P_M(A)}$

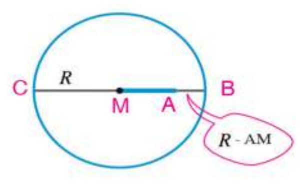
## Remarque 3

Si le point A est situé à l'intérieur du cercle M, alors: $P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

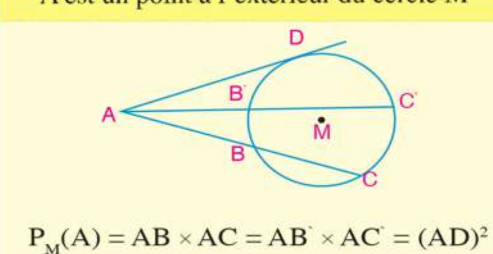
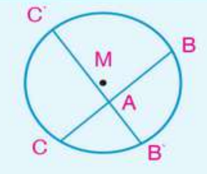
$= (AM - R)(AM + R)$

$= -(R - AM)(AM + R)$

$= -AB \times AC$




**En général**

| A est un point à l'extérieur du cercle M | A est un point à l'intérieur du cercle M |
|---|---|
|   |   |
| $P_M(A) = AB \times AC = AB' \times AC' = (AD)^2$ | $P_M(A) = -AB \times AC = -AB' \times AC'$ |

**Exemple**

(2) Soit un cercle de centre M et de rayon 31cm. Le point A est situé à 23cm du centre du cercle. On trace la corde $\overline{BC}$ telle que $A \in \overline{BC}$ et AB = 3 AC, Calcule :

**A** la longueur de la corde $\overline{BC}$

**B** la distance de la corde $\overline{BC}$ au centre du cercle

**Solution**

Dans le cercle M:

**A** $\because R = 31cm, AM = 23cm$ et $A \in \overline{BC}$

$\therefore$ A est situé à l'intérieur du cercle

$P_M(A) = (AM)^2 - R^2 = -AB \times AC$

$(23)^2 - (31)^2 = -3AC \times AC$ $\therefore AC = 12cm$

$\therefore$ la longueur de la corde $\overline{BC} = 4\,AC = 4 \times 12 = 48cm$

**B** Soit la distance de la corde au centre du cercle = MD où $\overline{MD} \perp \overline{BC}$

$\because \overline{MD} \perp \overline{BC}$ $\therefore$ D est le milieu de $\overline{BC}$, d'où BD = 24cm

$\therefore (MD)^2 = (31)^2 - (24)^2 = 385$ $\therefore MD = \sqrt{385} \simeq 19{,}6$ cm

**Essaie de résoudre**

(2) Soit un cercle de centre N et de rayon 8 cm. Le point B est situé à 12 cm du centre du cercle. On trace une droite passant par le point B qui coupe le cercle en deux points C et D où CB = CD. Calcule la longueur de la corde $\overline{CD}$ et sa distance par rapport au point N.

**Exemple**

(3) M et N sont deux cercle sécants en A et B. $C \in \overrightarrow{BA}$ et $C \notin \overline{BA}$, On trace $\overrightarrow{CD}$ qui coupe le cercle M en D et E où CD = 9 cm et DE = 7 cm. On trace $\overrightarrow{CF}$ tangente au cercle N en F.

**A** Démontre que $P_M(C) = P_N(C)$.

**B** Si AB = 10cm. trouve la longueur de $\overline{AC}$ et $\overline{CF}$.

**Solution**

**A** $\because$ C est situé à l'extérieur du cercle M, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont sécantes au cercle M.

$\therefore P_M(C) = CD \times CE = CA \times CB$ (1)

$\because$ C est situé à l'extérieur du cercle N, $\overrightarrow{CB}$ est une sécante et $\overline{CF}$ est une tangente au cercle.

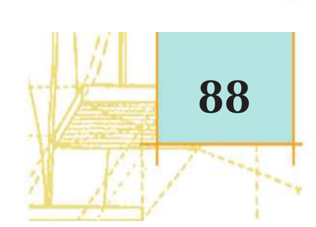
$\therefore P_N(C) = CA \times CB = (CF)^2$ (2)

De (1) et (2), $\therefore P_M(C) = P_N(C) = 9 \times 16 = 144$

**B** $\because AB = 10cm$ $\therefore P_N(C) = CA\,(CA + 10) = (CF)^2 = 144$

$\because (CA)^2 + 10\,CA = 144 \therefore CA = 8cm$

$\because (CF)^2 = 144$ $\therefore CF = 12cm$



**Remarques importantes**

L'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à deux cercles distincts est appelé l'axe radical aux deux cercles.

**Si** $P_M(A) = P_N(A)$, **alors** A est un point de l'axe radical aux deux cercles M et N.

Dans l'exemple précédent, on remarque que : $P_M(C) = P_N(C)$ , $P_M(A) = P_N(A) =$ zero , $P_M(B) = P_N(B) = 0$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ est un axe radical aux deux cercles M et N.

**Essaie de résoudre**

**3** M et N sont deux cercle tangents extérieurement en A, $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune aux deux cercles. $\overrightarrow{BC}$ coupe le cercle M en C et D et $\overrightarrow{BE}$ coupe le cercle N en E et F respectivement.

**A** **Démontrer que :** $\overleftrightarrow{AB}$ est un axe radical aux deux cercles M et N .

**B** Si $P_M(B) = 36$ , BC = 4cm et EF = 9cm, **trouve la longueur de** $\overline{CD}$ , $\overline{AB}$ et $\overline{BE}$.

## 2) Sécante, tangente et mesures d'angles

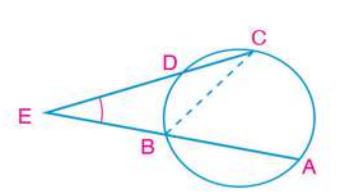
Tu as déjà étudié que :

**1-** Si deux sécantes se coupent à l'intérieur d'un cercle, la mesure de l'angle formé par leur intersection est égale à la demi-somme de mesure de l'arc intercepté à cet angle et celle de l'arc intercepté opposé à cet angle

**Dans la figure ci contre,** $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$

On a: $m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{DB})]$

**2-** Si deux sécantes se coupent à l'extérieur d'un cercle, la mesure de l'angle formé par leur intersection est égale à la demi-différence des mesures des deux arcs intercepte par cet angle.





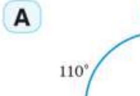
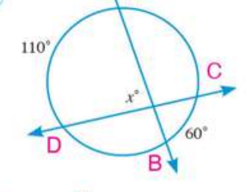
**Dans la figure ci contre**: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$

On a : $m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{DB})]$

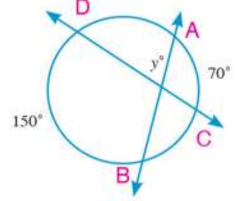
**Essaie de résoudre**

**4** Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour mesurer l'angle.

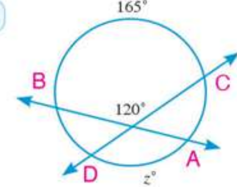
**A**

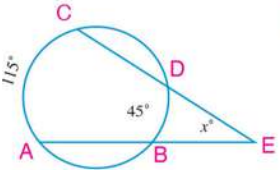

**B**

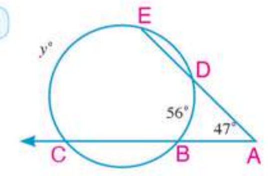

**C**



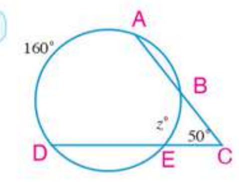

**D**




**E**




**F**



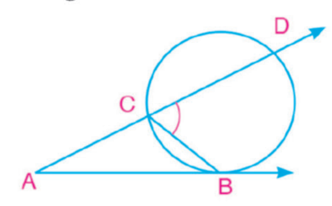
**Déduction de la mesure de l'angle formé par l'intersection d'une sécante et d'une tangente (ou par deux tangentes) d'un cercle .**




**La mesure de l'angle formé par l'intersection d'une sécante et d'une tangente (ou par deux tangentes) qui se coupent à l'extérieur d'un cercle est égale à la demi-différence des mesures des deux arcs intercepte par cet angle.**

## Démonstration

**Premier cas :** Intersection d'une sécante et d'une tangente.



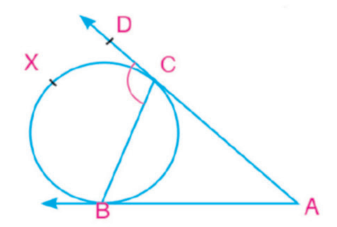

$\because \angle$ DCB est extérieur au triangle ABC

$\therefore m(\angle A) = m(\angle BCD) - m(\angle CBA)$

$= \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BD}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BC})$

$= \frac{1}{2} [m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC})]$

**Deuxième cas :** Intersection de deux tangentes.




$\because \angle$ DCB est extérieur au triangle ABC

$\therefore m(\angle A) = m(\angle BCD) - m(\angle CBA)$

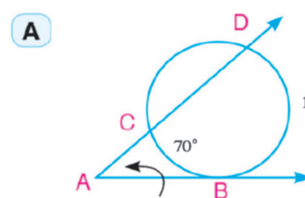
$= \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BXC}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BC})$

$= \frac{1}{2} [m(\overset{\frown}{BXC}) - m(\overset{\frown}{BC})]$

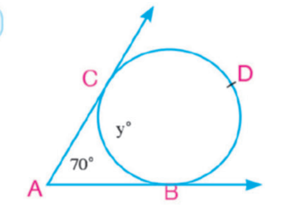
## Essaie de résoudre

**5** A l'aide des données de chaque figure, trouve la valeur du symbole utilisé pour mesurer l'angle :

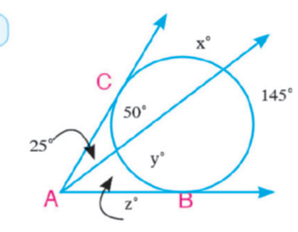
**A**




**B**




**C**



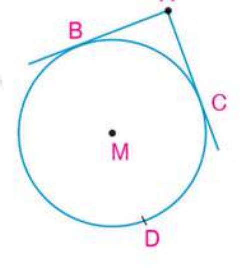

**Exemple**

**4** **Liens avec les satellites :** Un satellite tourne en orbite gardant une hauteur constante au dessus de l'équateur. Dans le satellite, une caméra peut surveiller un arc de longueur 6011 km sur la surface de la terre. Si la mesure de l'arc est 54° , trouve :

**A** La mesure de l'angle de la caméra posé sur le satellite.

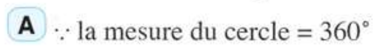
**B** La longueur du rayon de la terre à l'équateur.




Modélisation du problème : Si on considère que le cercle M représente le cercle de l'équateur, on obtient :

$m(\overset{\frown}{BC}) = 54°$ et la longueur de $\overset{\frown}{BC} = 6011$km.

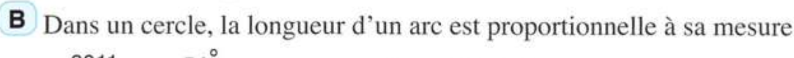


**A** $\because$ la mesure du cercle = 360°

$\therefore m(\overset{\frown}{BDC}) = 360° - 54° = 306°$

Donc $m(\angle A) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{BDC}) - m(\overset{\frown}{BC})]$

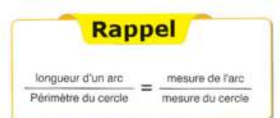
$= \frac{1}{2}(306° - 54°) = 126°$



**B** Dans un cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à sa mesure

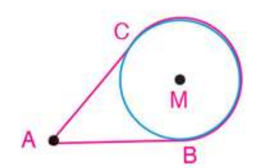
$\frac{6011}{2 \times \pi \times R} = \frac{54°}{360°}$ $\therefore R = 6377.87$km

$\therefore$ la longueur du rayon de la terre à l'équateur $\simeq$ 6378km .




## Essaie de résoudre

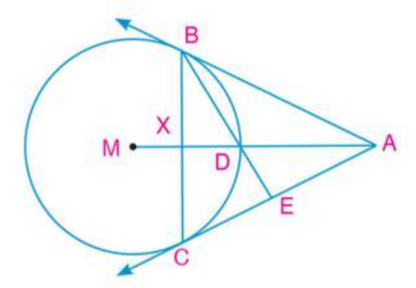
**6** Une poulie tourne autour d'un axe M à l'aide d'une courroie passant sur une petite poulie en A. Si la mesure de l'angle entre les deux parties de la courroie est 40°. trouve la longueur du grand arc $\overset{\frown}{BC}$ , sachant que la longueur du rayon de la plus grande poulie est 9cm.




**7** **Dans la figure ci-contre:** M est un cercle de rayon 9 cm., $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont tangentes au cercle en B et C . $\overline{AM}$ coupe le cercle en D et $\overline{BC}$ en X. On trace $\overrightarrow{BD}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E. Si $P_M(A) = 144$ trouve :

**A** la longueur de $\overline{AB}$

**B** la longueur de $\overline{AX}$.

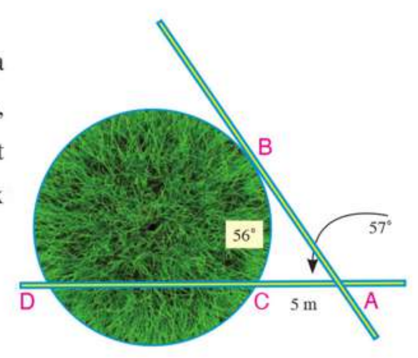



## Test de compréhension

**Résolution de problèmes :** **La figure ci-contre** montre la maquette d'un jardin circulaire. On construit deux passerelles, l'une à l'extérieur du jardin qui lui est tangente en un point B et l'autre le traverse en le coupant en deux points C et D. Les deux passerelles se croisent en A.

Si $P_M(A) = 100$ et AC = 5 mètres .

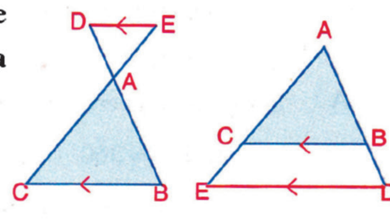
trouve la longueur de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ , puis calcule $m(\overset{\frown}{BD})$.

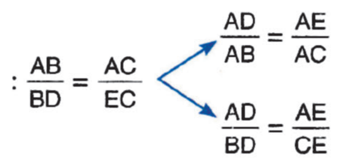


# Résumé de l'unité

**Théorème 1:** Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles.

**Corollaire :** Si une droite extérieure au triangle ABC parallèle au côté $\overline{BC}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ **en D et E respectivement (voir la figure), alors**



$$: \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad ; \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

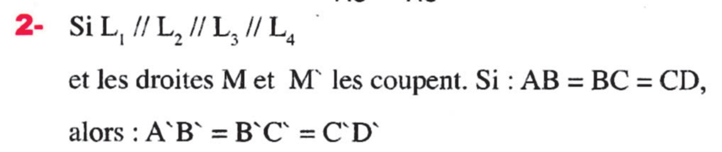
**Réciproque du théorème 1:** Si une droite coupant deux côtés d'un triangle les partage en segments de longueurs proportionnelles, alors cette droite est parallèle au troisième côté du triangle.

**Cas général du théorème de Thalès** : Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles.

**Cas particuliers**

**1-** Si les droites M et M` se coupent en A et si : $\overleftrightarrow{BB`} \ // \ \overleftrightarrow{CC`}$ , alors : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB`}{AC`}$

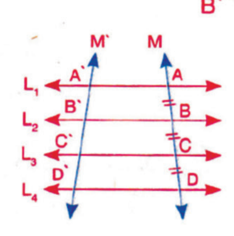
Et réciproquement si : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB`}{AC`}$, alors : $\overleftrightarrow{BB`} \ // \ \overleftrightarrow{CC`}$



**2-** Si $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$

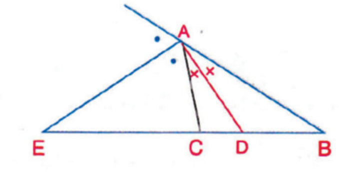
et les droites M et M` les coupent. Si : AB = BC = CD,

alors : A`B` = B`C` = C`D`




**Théorème 3** : Bissectrice d'un angle d'un triangle :
La bissectrice intérieure (ou extérieure) d'un angle d'un triangle partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle.

**Remarques importantes : Dans la figure ci-contre**




**1-** $\overline{BC}$ est partagé intérieurement en D et extérieurement en E dans un même rapport d'où $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$

**2-** La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure sont perpendiculaires d'où $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$

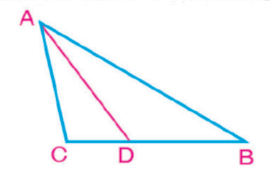
**3-** Si AB > AC, la bissectrice intérieure de $\angle$A coupe $\overline{BC}$ en D telle que BD > DC tandis que la bissectrice extérieure de $\angle$A coupe $\overrightarrow{BC}$ en E où BE > EC.

**4-** $AD = \sqrt{BA \times AC - DB \times DC}$

**5-** $AE = \sqrt{BE \times EC - BA \times AC}$

# Résumé de l'unité

**Cas particulier du théorème 3**



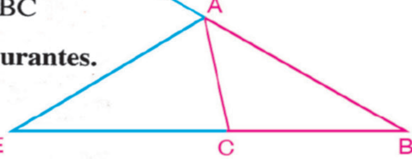

**1-** Dans le triangle ABC:

**Si** $D \in \overline{BC}$ tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

**alors ,** $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle BAC$

**Si** $E \in \overrightarrow{BC}$ et $E \notin \overline{BC}$ , tel que $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

**alors ,** $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de $\angle A$ extérieure au triangle $\triangle ABC$




**2 - Corollaire : Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.**

**1) Puissance d'un point par rapport à un cercle**

La puissance d'un point A par rapport à un cercle M de rayon R est le nombre réel $P_M(A)$ où :

$P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

Si $P_M(A) > 0$ , le point A est situé à l'extérieur du cercle.

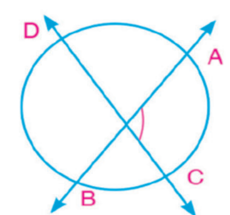
Si $P_M(A) = 0$ , le point A est situé sur le cercle.

Si $P_M(A) < 0$ , le point A est situé à l'intérieur du cercle

**2) Sécante, tangente et mesure d'angle**

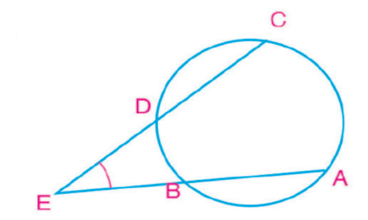
**1-** Mesure de l'angle formé par l'intersection de deux sécantes d'un cercle :

**A** à l'intérieure du cercle




$m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{DB})]$

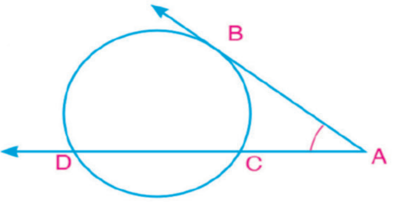
**B** à l'extérieure du cercle




$m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{DB})]$

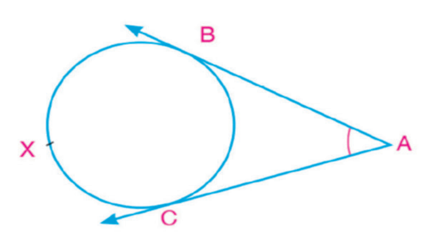
**2-** Mesure de l'angle formé par l'intersection d'une sécante et d'une tangente d'un cercle :

$m(\angle A) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC})]$




**3-** Mesure de l'angle formé par l'intersection de deus tangentes d'un cercle :

$m(\angle A) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{BXC}) - m(\overset{\frown}{BC})]$






# Trigonométrie

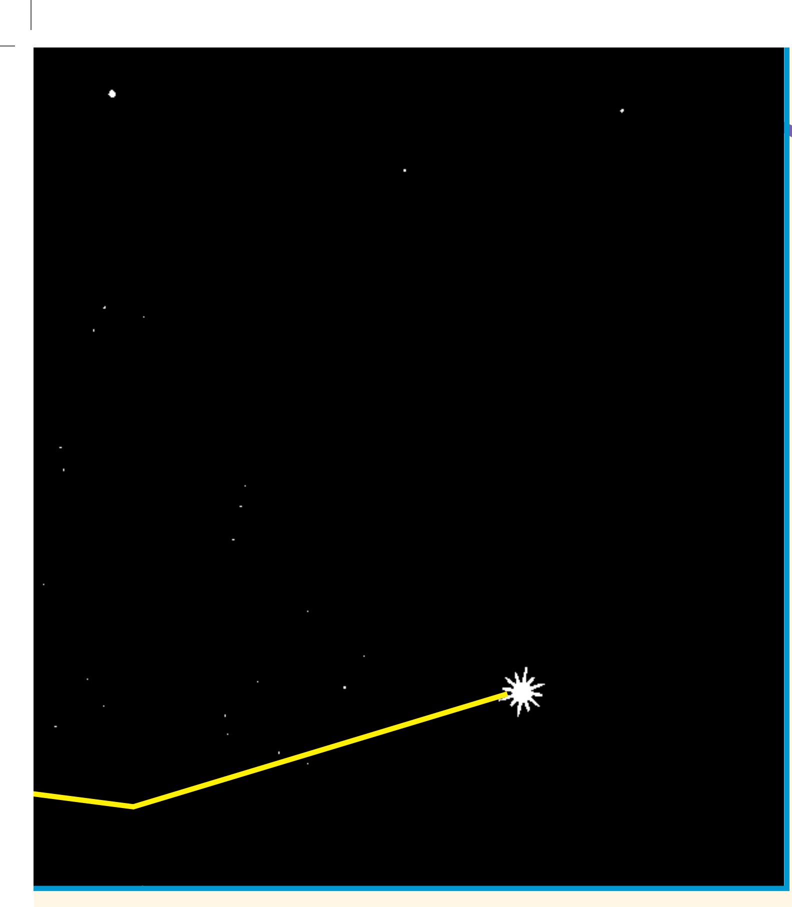
## Objectifs de l'unité

**Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :**

- Identifier un angle orienté.
- Identifier la position standard d'un angle orienté.
- Reconnaitre la mesure positive et la mesure négative d'un angle orienté.
- Distinguer la nature de la mesure de l'angle (en degrés et en radians).
- Identifier la mesure en radians de l'angle au centre dans un cercle.
- Utiliser une calculatrice pour convertir une mesure en radian en une mesure en degrés et vis versa.
- Identifier les fonctions trigonométriques.
- Déterminer le signe de différentes fonctions trigonométriques dans les quatre quadrants.
- Déduire que les ensembles d'angles équivalents ont les mêmes fonctions trigonométriques.
- Reconnaitre les rapports trigonométriques d'un angle aigu et d'un angle quelconque.
- Déduire les rapports trigonométriques de certains angles particuliers.
- Reconnaitre les relations particulières $(\theta \pm 180°)$, $(\theta \pm 360°)$, $(90° \pm \theta)$ et $(270° \pm \theta)$
- Trouver l'ensemble solution des équations trigonométriques de la forme :
  - sin ax = cos bx
  - tg ax = cotg bx
  - sec ax = cosec bx
- Trouver la mesure d'un angle en connaissant une valeur de l'un de ses rapports trigonométriques.
- Identifier la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus et déduire leurs propriétés.
- Utiliser une calculatrice scientifique pour calculer les rapports trigonométriques de certains angles particuliers.
- Modéliser certains phénomènes physiques et de la vie quotidienne qui sont représentés par des fonctions trigonométriques.
- Utiliser la technologie de l'information pour reconnaitre les différentes applications des concepts de base de la trigonométrie.

## Expressions de base

- Mesure en degrés
- Mesure en radians
- Angle orienté
- Radian
- Position standard
- Mesure positive
- Mesure négative
- Angles équivalents
- Angle quadrant
- Fonction trigonométrique
- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cosécante
- Sécante
- Cotangente
- Fonction circulaire
- Angles associés



## Leçons de l'unité

Leçon (4 – 1) : L'angle orienté

Leçon (4 – 2) : Mesure en radians et mesure en degrés

Leçon (4 – 3) : Fonctions trigonométriques

Leçon (4 – 4) : Angles associés

Leçon (4 – 5) : Représentation graphique des fonctions trigonométriques

Leçon (4 – 6) : Trouver la mesure d'un angle à partir d'une fonction trigonométrique

## Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – Papiers graphiques – Ordinateur – Logiciels.

## Historique

La trigonométrie est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles. Cette science a prospéré, parmi les mathématiques anciennes, particulièrement dans l'astronomie à laquelle l'homme s'est intéressé pour contempler et observer le mouvement du soleil, de la lune, des étoiles et des planètes dans l'univers.

Le mathématicien arabe Nosseir El-dine El-Toussi est considéré comme le premier qui a différencié la trigonométrie de l'astronomie.

Les Arabes se sont beaucoup intéressés à la trigonométrie. On dit que l'expression « tangente » est décrite par le savant arabe Abu'l-Wafa Al Buzjani (940-998) au dixième siècle. Cette expression (en langue arabe) est issue de l'ombre des corps qui se constituent par les rayons de la lumière émise par le soleil.

Les Arabes ont également de nombreux ajouts en trigonométrie plane et trigonométrie sphérique (relative à la surface d'une sphère) et c'est des Arabes que les Occidentaux ont adopté des idées importantes auxquelles ils ont beaucoup contribué. La trigonométrie est devenue un domaine des recherches en mathématique, et dont l'application scientifique et pratique, très diversifiée, a participé au progrès et à la prospérité de l'humanité.

## Organigramme de l'unité

Trigonométrie

Angle orienté

Position standard d'un angle orienté

Mesure positive

Mesure négative

Mesure en degrés

Mesure en radians

Applications physiques et de la vie quotidienne

Technologie de l'information

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus

Fonctions trigonométriques

Signe des fonctions trigonométriques dans les quatre quadrants

Rapports trigonométriques des angles particuliers

Rapports trigonométriques d'un angle

Angles associés

$(180° \pm \theta)$ $(360° \pm \theta)$

$(90° \pm \theta)$ $(270° \pm \theta)$

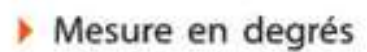


# 4 - 1 L'angle orienté

### A apprendre

- Notion de l'angle orienté.
- Position standard d'un angle orienté.
- Mesure positive et mesure négative d'un angle orienté.
- Position d'un angle orienté dans un repère orthogonal.
- Notion des angles équivalents.

### Expressions de base



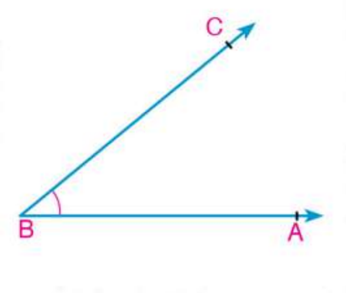
- Mesure en degrés
- Angle orienté
- Position standard
- Mesure positive
- Mesure négative
- Angle équivalent
- Angle quadrant

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique




Tu as déjà étudié qu'un angle est la réunion de deux demi-droites ayant une même origine.




Dans la figure ci-contre, le point B est appelé « **le sommet de l'angle** » et les deux demi-droites $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont les côtés de l'angle.

Par conséquent, $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = (\angle ABC)$

Qui s'écrit également $\widehat{ABC}$ .

## Mesure d'un angle en degrés

Tu sais que la mesure en degrés d'un angle est basée sur le partage d'un cercle en 360 arcs de même longueur. Il en résulte :

**1-** l'angle au centre dont les deux côtés passent par les deux extrémités de l'un de ces arcs a pour mesure un degré qu'on note (1°)

**2-** Chaque degré est subdivisé en 60 parties égales dont chacune est appelée « une minute qu'on note (1').

**3-** Chaque minute est subdivisée en 60 parties dont chacune est appelée « une seconde » qu'on note (1").

**Donc** $1° = 60'$ et $1' = 60''$

### A apprendre

## Angle orienté

Si on observe l'ordre de présentation des deux demi-droites formant un angle, on peut les écrire sous la forme du couple ( $\overrightarrow{OA}$ , $\overrightarrow{OB}$ )

Le premier élément du couple $\overrightarrow{OA}$ est le côté initial de l'angle et son second élément $\overrightarrow{OB}$ est le côté final de l'angle ayant pour sommet O comme le montre la figure (1) .

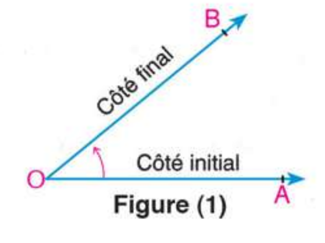



Figure (1)

Si le côté initial de l'angle est $\overrightarrow{OB}$ et le côté final de l'angle est $\overrightarrow{OA}$, le couple s'écrit ( $\overrightarrow{OB}$ , $\overrightarrow{OA}$ ) comme le montre la figure (2).

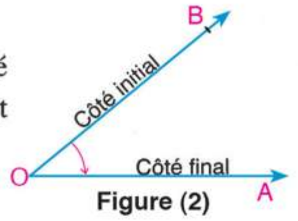
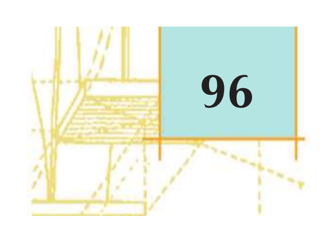



Figure (2)






**L'angle orienté est un couple de demi-droites de même origine. L'origine est le sommet de l'angle et les deux demi-droites sont les côtés de l'angle.**

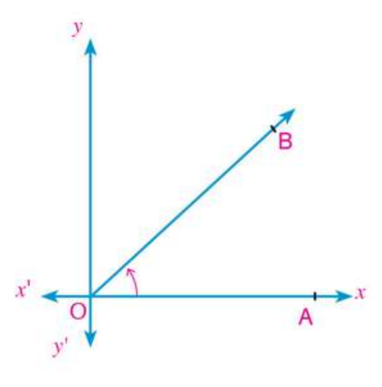
## Réflexion critique:

➢ A-t-on $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ ? Justifie ta réponse.

## Position standard d'un angle orienté

On dit qu'un angle est en position standard si son sommet est le point d'origine dans un repère orthogonal et son côté initial est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.

Dans la figure ci-contre, l'angle $\angle AOB$ est-il un angle orienté ? Explique ta réponse.



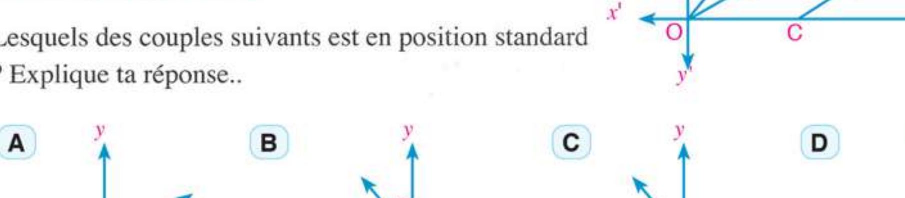

## Expression orale

Dans la figure ci-contre, Lesquels des couples suivants représentent des angles orientés en position standard ? Explique ta réponse..

- **A** $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$
- **B** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$
- **C** $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA})$
- **D** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$
- **E** $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG})$
- **F** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

## Essaie de résoudre

**1** Lesquels des couples suivants est en position standard ? Explique ta réponse..



### Mesure positive et mesure négative d'un angle orienté

**Dans la figure (1)**, la mesure de l'angle orienté est positive si l'orientation du côté initial $\overrightarrow{OA}$ vers le côté final $\overrightarrow{OB}$ est contre le sens des aiguilles d'une montre.

**Dans la figure (2),** la mesure de l'angle orienté est négative si l'orientation du côté initial $\overrightarrow{OA}$ vers le côté final $\overrightarrow{OB}$ est dans le sens des aiguilles d'une montre.

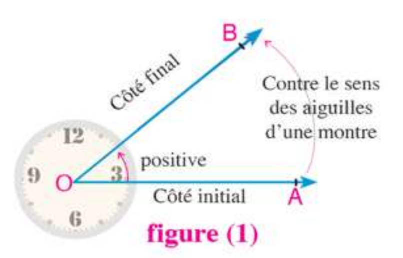



figure (1)

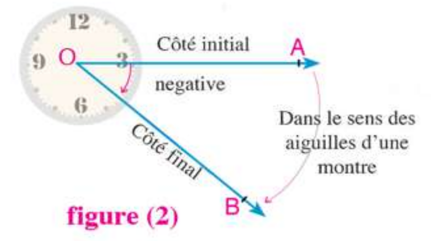
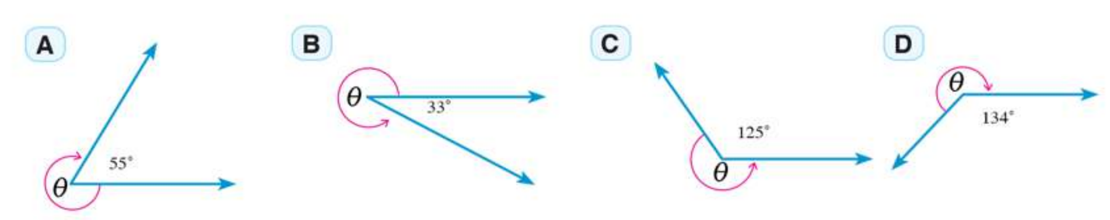



figure (2)

**Exemple**

**1** Trouve la mesure de l'angle orienté $\theta$ indiqué dans chacune des figures suivantes :




**Solution**

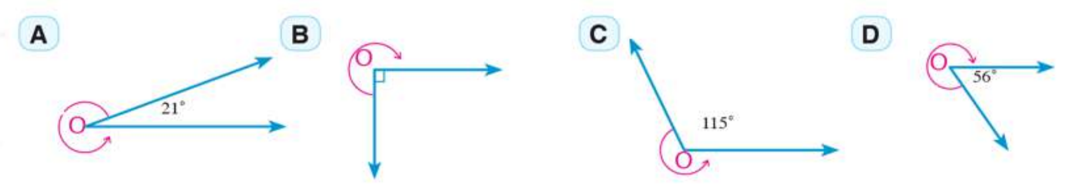
**On sait que la somme des mesures des angles formés autour d'un point est égale à 360°**

**A** $\theta = -(360° - 55°) = -305°$ **B** $\theta = 360° - 33° = 327°$

**C** $\theta = 360° - 125° = 235°$ **D** $\theta = -(360° - 134°) = -226°$

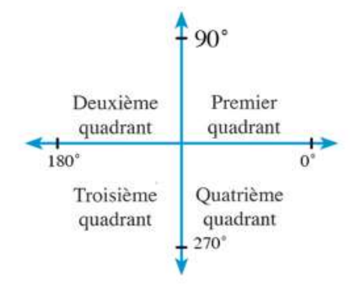
**Essaie de résoudre**

**2** Trouve la mesure de l'angle orienté O indiqué dans chacune des figures suivantes :

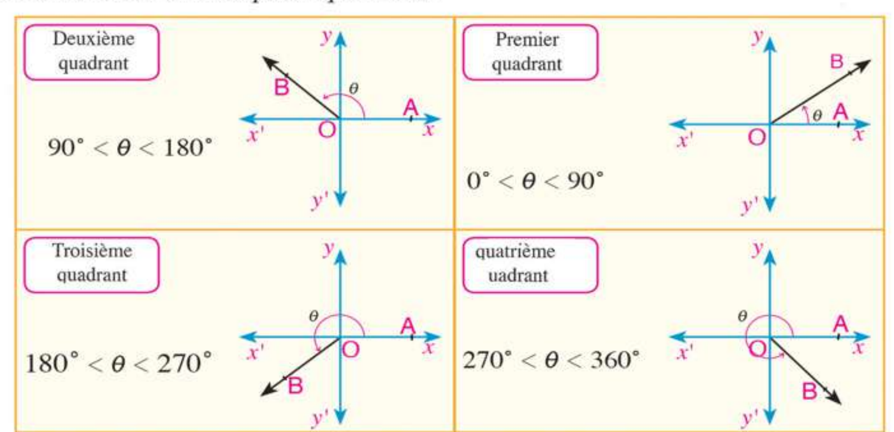



### Position d'un angle dans un repère orthogonal :

➢ On partage le repère orthogonal en quatre quadrants comme l'indique la figure ci-contre.



➢ Si l'angle orienté $\angle$ AOB de mesure positive ($\theta$) est en position standard, alors son côté final $\overrightarrow{OB}$ peut être situé dans l'un des quatre quadrants :




➢ Si le côté final $\overrightarrow{OB}$ est situé sur l'un des deux axes, l'angle dans ce cas est appelé « **Angle quadrant** ». Par conséquent les angles des mesures 0°, 90°, 180°, 270°, 360° sont des angles quadrants.




**2** Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

**A** 48° **B** 217° **C** 135° **D** 295° **E** 270°

**Solution**

**A** $0° < 48° < 90°$ Il est situé dans le premier quadrant.

**B** $180° < 217° < 270°$ Il est situé dans le troisième quadrant.

**C** $90° < 135° < 180°$ Il est situé dans le deuxième quadrant.

**D** $270° < 295° < 360°$ Il est situé dans le quatrième quadrant.

**E** 270° est un angle quadrant

## Essaie de résoudre

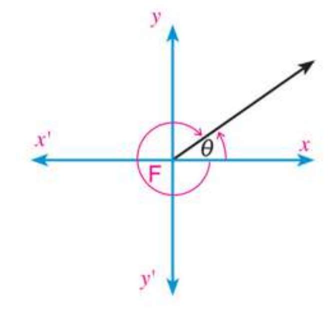
**3** Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

**A** 88° **B** 152° **C** 180° **D** 300° **E** 196°

**Remarque :**

➢ Si ($\theta$°) est la mesure positive d'un angle orienté, alors la mesure négative de cet angle est ($\theta° - 360°$)

➢ Si ($-\theta$°) est la mesure négative d'un angle orienté, alors la mesure positive de cet angle est ($-\theta° + 360°$)



**Exemple**




La somme des valeurs absolues de la mesure positive et de la mesure négative d'un angle orienté est égale à 360°

**3** Détermine la mesure négative d'un angle de mesure 275°.

**Solution**

La mesure négative d'un angle de mesure (275°) = 275° – 360° = – 85°

**Vérification :** $|275°| + |-85°| = 275° + 85° = 360°$

**Essaie de résoudre**

**4** Détermine la mesure négative de l'angle de mesure :

**A** 32° **B** 270° **C** 210° **D** 315°

**Exemple**

**4** Détermine la mesure positive d'un angle de mesure -235°

**Solution**

La mesure positive d'un angle de mesure (– 235°) = 360° – 235° = 125°

**Vérification :** $|-235°| + |125°| = 235° + 125° = 360°$

**Essaie de résoudre**

**5** Détermine la mesure positive de l'angle de mesure :

**A** –52° **B** –126° **C** –90° **D** –320°

**6** **Lien avec le sport :** Un lanceur de disque tourne d'un angle de mesure 150°. Dessine cet angle en position standard.

## Angles équivalents :

Observe les figures suivantes, puis détermine l'angle orienté $\theta$ en position standard dans chacune des figures suivantes. Que remarques-tu ?

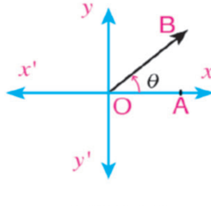


figure (1)

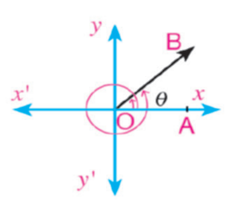


figure (2)

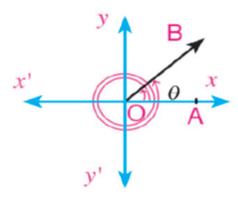


figure (3)

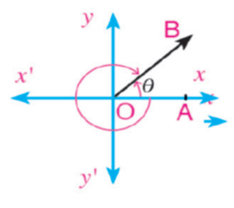


figure (4)

Dans les figures (2) , (3) et (4), on remarque que l'angle ($\theta$) et l'autre angle ont le même côté final $\overrightarrow{OB}$.

**Figure (1) :** L'angle de mesure $\theta$ est en position standard

**Figure (2) :** Les deux angles de mesures $\theta$ et $\theta + 360°$ sont équivalents.

**Figure (3) :** Les deux angles de mesures $\theta$ et $\theta + 360° \times 2$ sont équivalents

**Figure (4) :** Les deux angles de mesures $\theta$ et $\theta - 360°$ sont équivalents.

**De ce qui précède, on déduit que :**
Si un angle orienté de mesure $\theta$ est en position standard, tous les angles de mesures :

$\theta \pm 1 \times 360°$ ou $\theta \pm 2 \times 360°$ ou $\theta \pm 3 \times 360°$ ou .... ou $\theta \pm n \times 360°$ où $n \in \mathbb{Z}$

ont le même côté final et ils sont appelés **angles équivalents**.

**Exemple**

**5** Détermine deux angles, l'un de mesure positive et l'autre de mesure négative, équivalents à chacun des deux angles suivants :

**A** $120°$ **B** $-230°$

**Solution**

**A** Un angle de mesure positive : $120° + 360° = 480°$ **(en ajoutant 360°)**
Un angle de mesure négative : $120° - 360° = -240°$ **(en retranchant 360°)**

**B** Un angle de mesure positive : $-230° + 360° = 130°$ **(en ajoutant 360°)**
Un angle de mesure négative : $-230° - 360° = -590°$ **(en retranchant 360°)**

**Réfléchis :** Y a-t-il d'autres angles équivalents de mesures positives et d'autres angles équivalents de mesures négatives ? Cite d'autres angles s'ils existent.

**Essaie de résoudre**

**7** Détermine deux angles, l'un de mesure positive et l'autre de mesure négative, équivalents à chacun des angles suivants :

**A** $40°$ **B** $150°$ **C** $-125°$ **D** $-240°$ **E** $-180°$

**8** **Déceler l'erreur :** Toutes les mesures d'angles suivantes sont équivalentes à l'angle en position standard de mesure 75° sauf une :

**A** $-285°$ **B** $-645°$ **C** $285°$ **D** $435°$

## Test de compréhension

**1** Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

**A** $56°$ **B** $325°$ **C** $570°$ **D** $166°$ **E** $390°$

**2** Détermine un angle de mesure négative, équivalent à chacun des angles suivants :

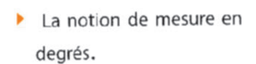
**A** $43°$ **B** $214°$ **C** $125°$ **D** $90°$ **E** $312°$

**3** Détermine un angle de mesure positive, équivalent à chacun des angles suivants :

**A** $-56°$ **B** $-215°$ **C** $495°$ **D** $930°$ **E** $-450°$

# 4 - 2 Mesure en radians et mesure en degrés

## A apprendre



- La notion de mesure en degrés.
- Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians.
- Calcul de la longueur d'un arc d'un cercle.

## Expressions de base

- Mesure en degrés
- Mesure en radians
- Radian

## Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



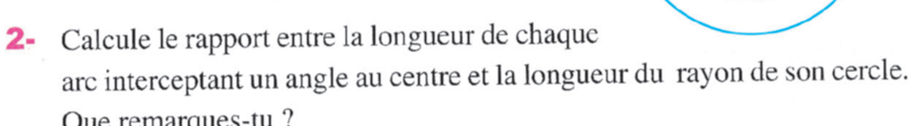

On sait qu'en mesure en degrés, on utilise les degrés, les minutes et les secondes. Un degré = 60 minutes et une minute = 60 secondes
Y a-t-il d'autres unités de mesures d'angles ?

### Mesure en radians




**1-** Trace un ensemble de cercles concentriques comme dans la figure ci-contre.

**2-** Calcule le rapport entre la longueur de chaque arc interceptant un angle au centre et la longueur du rayon de son cercle. Que remarques-tu ?



**On remarque que :** le rapport entre la longueur d'un arc et et la longueur du rayon de son cercle est constant.

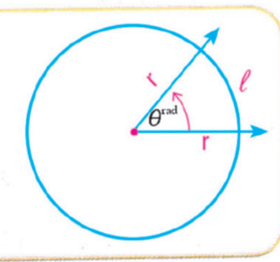
**Donc** $\frac{\text{longueur } \overset{\frown}{A_1 B_1}}{OA_1} = \frac{\text{longueur } \overset{\frown}{A_2 B_2}}{OA_2} = \frac{\text{longueur } \overset{\frown}{A_3 B_3}}{OA_3} = \text{constante}$

Cette valeur constante est la mesure en radians d'un angle.
La mesure en radians d'un angle au centre = $\frac{\text{longueur de l'arc qui intercepte l'angle}}{\text{longueur du rayan du cercle}}$




Si $\theta^{rad}$ la mesure d'un angle au centre d'un cercle de longueur de rayon R , intercepte un arc de longueur L, alors

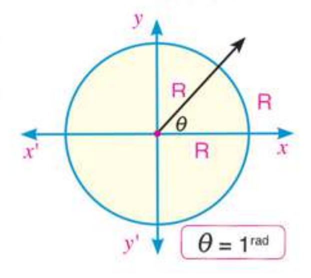
$$\theta^{rad} = \frac{L}{R}$$




De la définition précédente, on déduit que :

$$L = \theta^{rad} \times R \quad \text{et} \quad R = \frac{L}{\theta^{rad}}$$

L'unité de mesure dans ce cas est le radian notée ( $1^{rad}$ ) et se lit (un radian).







**Le radian**

**C'est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale à la longueur du rayon du cercle.**

**Réflexion critique :** La mesure en radians d'un angle au centre est-elle proportionnelle à la longueur de l'arc qu'il intercepte ? Explique ta réponse.

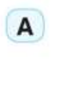
**Exemple**

**4** La longueur du rayon d'un cercle est égale à 8 cm. Trouve à un centième près la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{5}{12}\pi$.

**Solution**

**On utilise la formule de la longueur de l'arc :** $L = \theta^{rad} \times R$

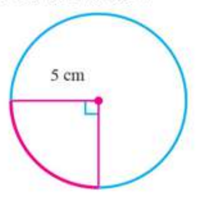
$r = 8$ cm , $\theta^{rad} = \frac{5\pi}{12}$ , $L = 8 \times \frac{5\pi}{12}$ $\therefore L \simeq 10{,}47$cm



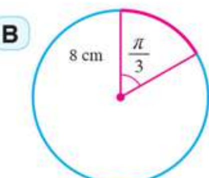
**Essaie de résoudre**

**1** Détermine à un centième près, la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre dans chacun des cercles suivants :

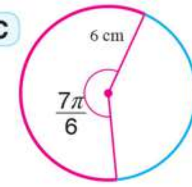
**A**




**B**




**C**




## Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians d'un angle :

**On sait que** la mesure de l'angle au centre dans un cercle est égale à la mesure de l'arc qu'il intercepte.

**Par conséquent,** l'angle au centre dont la mesure en degrés est 360°, a pour longueur d'arc $2\pi R$

**Dans un cercle d'unité :**

$2\pi$ (en radians) est équivalent à 360°.

**D'où** $\pi^{rad}$ est équivalent à 180° , $1^{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ\ 17'\ 45''$

**À retenir**

**Si la longueur du rayon d'un cercle est égale à l'unité de longueur, le cercle est appelé « cercle d'unitair »**

Si un angle a pour mesure en radians $\theta^{rad}$ et pour mesure en degrés $x^\circ$ , alors :

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{rad}}{\pi}$$



(5) Transforme 30° en mesure en radians en fonction de $\pi$.

**Pour transformer en radians, on applique la formule** $\frac{x°}{180°} = \frac{\theta^{rad}}{\pi}$

$$\theta^{rad} = \frac{30° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$$



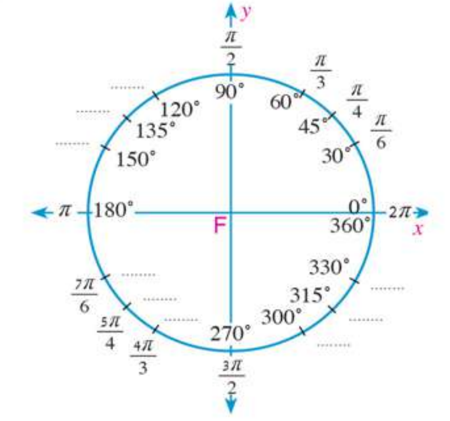
**Il y a une autre unité pour mesurer l'angle appelée «le grade» qui est égale à $\frac{1}{200}$ de la mesure d'un angle plat.**

**Si x , $\theta$ et z sont les meures d'un même angle en degrés, en radians et en grade respectivement, alors :**

$$\frac{x°}{180°} = \frac{\theta^{rad}}{\pi} = \frac{y^{rad}}{200}$$

**Essaie de résoudre**

(2) La figure ci-contre indique les mesures de quelques angles particuliers dont certaines mesures sont indiquées en radians à l'extérieur du cercle et en degrés à l'intérieur du cercle. Complète les mesures des angles équivalents manquants.




**Exemple**

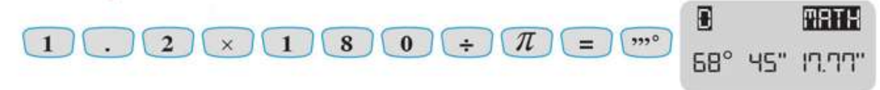
(6) Transforme $1,2^{rad}$ en mesure en degrés.

**Solution**

$$x° = \frac{1,2 \times 180°}{\pi}$$

$$x° = 68,75493542 = 68° \, 45' \, 18''$$

**On peut utiliser la calculatrice comme suit :**




**Essaie de résoudre**

(3) Transforme chacune des mesures en radians suivantes en mesure en degrés :

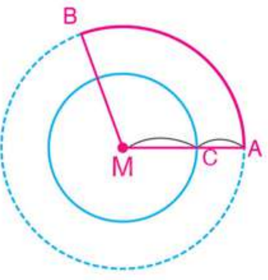
**A** $0.7^{rad}$ **B** $1.6^{rad}$ **C** $2.05^{rad}$ **D** $-1.05^{rad}$

**Exemple**

(7) **Liens avec l'espace :** Un satellite qui tourne autour de la terre dans une orbite circulaire fait un tour complet en trois heures. Si la longueur du rayons de la terre est environ 6400 km et le satellite est distant de la surface de la terre de 3600 km, calcule, à un kilomètre près, la distance parcourue par le satellite en une heure.



 **Solution**

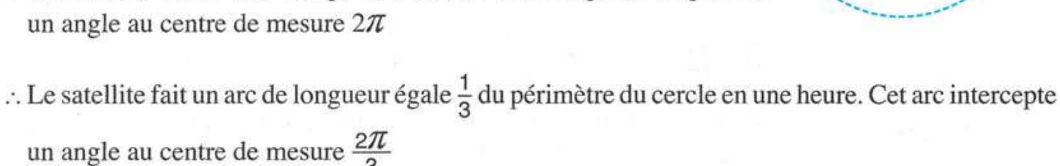



La figure ci-contre montre l'orbite circulaire du mouvement de la lune :

$\because$ La longueur du rayon de l'orbite MA = MC + CA

$\therefore$ MA = 6400 + 3600 = 10 000 km

$\because$ Le satellite fait le tour complet en trois heures ce qui correspond à un angle au centre de mesure $2\pi$



$\therefore$ Le satellite fait un arc de longueur égale $\frac{1}{3}$ du périmètre du cercle en une heure. Cet arc intercepte un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{3}$

$$L = \theta^{rad} \times R$$

**En utilisant la formule de la longueur de l'arc :**

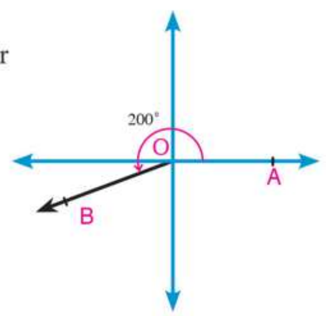
**Si R = 10000 km et $\theta^{rad} = \frac{2\pi}{3}$ :**

$$L = \frac{2\pi}{3} \times 10\,000$$

$$L \simeq 20944 \text{ km}$$

**8** **Jeux sportifs :** Un gymnaste tourne d'un angle de mesure 200°. Trace cet angle dans la position standard puis calcule sa mesure en radians.

 **Solution**




On construit un repère orthogonal d'origine O. Supposons que le joueur tourne d'un angle orienté AOB :

tel que $\angle$ (AOB) = ($\overrightarrow{OA}$ , $\overrightarrow{OB}$) donc m ($\angle$ AOB) = 200° .

$\because$ 180° < 200° < 270°

$\therefore$ le côté final de l'angle est situé au troisième quadrant.

$$200° = \frac{200 \times \pi}{180} \simeq 3{,}49^{rad}$$

## Essaie de résoudre

**4** **Lien avec le sport :** Un joueur de squash se déplace suivant un arc d'un cercle de longueur de rayon 1,4 mètres. Si l'angle de rotation du joueur est 80°, trouve à un dixième près la longueur de l'arc.

 **Test de compréhension**

**9** **Industrie :** Le disque d'une machine tourne d'un angle de mesure – 315°. Dessine cet angle en position standard.



# 4 - 3 Fonctions trigonométriques

## A apprendre

- Cercle d'unité.
- Fonctions trigonométriques de base.
- Fonctions trigonométriques inverses.
- Signe des fonctions trigonométriques.
- Fonctions trigonométriques de certains angles particuliers

## Expressions de base

- Fonction trigonométrique
- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cosécante
- Sécante
- Cotangente

## Materials

- Une calculatrice scientifique

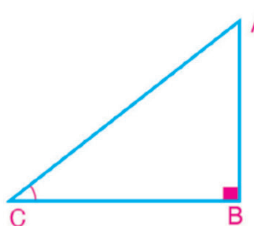



Tu as déjà étudié les rapports trigonométriques de base d'un angle aigu.
Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\sin C = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos C = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

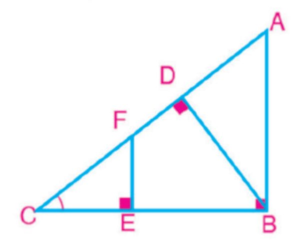
$$\text{tg } C = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AB}{BC}$$




**1-** **Dans la figure ci-contre,** exprime sin C de trois rapports différents.

★ Les trois rapports sont-ils égaux ? Explique ta réponse.

★ Que peux-tu déduire ?




**Remarque que:**

Les triangles BAC , EFC et DBC sont semblables. Pourquoi ?

De la similitude des triangles, on obtient : $\frac{BA}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{DB}{BC} = \sin C$ (Pourquoi ?)

Cela signifie que le rapport trigonométrique d'un angle aigu est constant. Ce rapport ne change que si l'angle lui-même change.

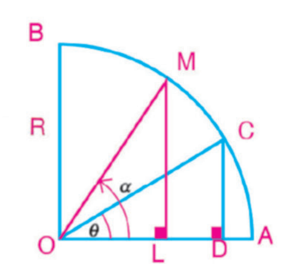
**2-** **La figure ci-contre** indique un quart cercle de longueur de rayon R cm où: m ($\angle$DOC) = $\theta$

$$\sin \theta = \frac{CD}{R}$$

Si m ($\angle$DOC) augmente et devient $\alpha$

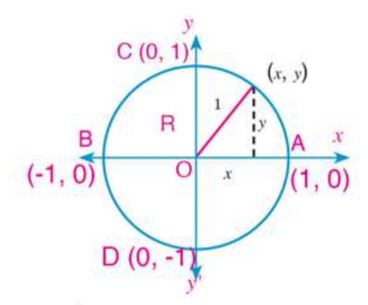
Alors $\sin \alpha = \frac{ML}{R}$

Donc le changement de la mesure d'un angle entraine le changement de ses rapports trigonométiques.



### Cercle trigonométrique

Dans un repère orthogonal, le cercle ayant pour centre le point d'origine du repère et pour longueur de rayon l'unité de longueur est appelé « le cercle trigonométrique ».




★ Le cercle d'unité coupe l'axe des abscisses aux points A (1, 0) et B (-1, 0), Il coupe également l'axe des ordonnées aux points C (0, 1) et D (0, -1).

★ Si $(x, y)$ sont les coordonnées d'un point appartenant au cercle d'unité, alors :

$x \in [-1, 1]$ , $y \in [-1, 1]$.

où $x^2 + y^2 = 1$ **Théorème de Pythagore**

### Fonctions trigonométriques de base d'un angle

Soit un angle orienté de mesure $\theta$, en position standard. Si le côté final de l'angle coupe le cercle d'unité au point $B(x, y)$. on peut définir les fonctions suivantes :

**1-** cosinus $\theta$ = l'abscisse du point B

**Donc** $\cos\theta = x$

**2-** sinus $\theta$ = l'ordonnée du point B

**Donc** $\sin\theta = y$

**3-** tangente $\theta = \dfrac{\text{l'ordonnée du point B}}{\text{l'abscisse du point B}}$

**Donc** $\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$ où $x \neq 0$ et par conséquent , $\text{tg}\ \theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ où $\cos\theta \neq 0$

**Remarque que:** Tout point $(x, y)$ appartenant au cercle d'unité peut s'écrire sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$

**Si** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le point d'intersection du côté final d'un angle orienté de mesure $\theta$ avec le cercle d'unité

**alors :** $\cos\theta = \frac{3}{5}$ , $\sin\theta = \frac{4}{5}$ et $\text{tg}\ \theta = \frac{4}{3}$

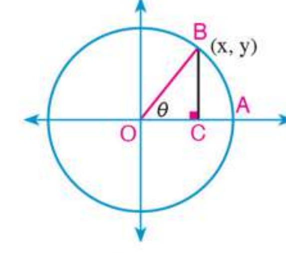
### Inverses des fonctions trigonométriques

Soit un angle orienté de mesure $\theta$ en position standard. Si le côté final de l'angle coupe le cercle trigonométrique au point $B(x, y)$, on peut définir les fonctions suivantes :

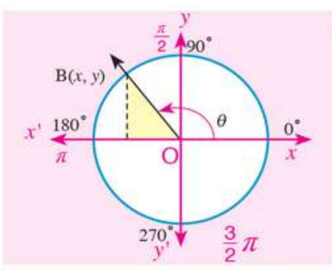
**1-** sécante $\theta$ : $\sec\theta = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ où $x \neq 0$

**2-** cosécante $\theta$ : $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ où $y \neq 0$

**3-** cotangente $\theta$ : $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\text{tg}\ \theta}$ où $y \neq 0$



## Signe des fonctions trigonométriques

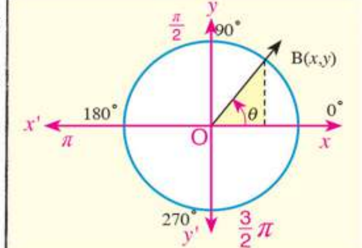



**Deuxième quadrant**

$x < 0$

$y > 0$

Le côté final de l'angle est situé au deuxième quadrant. Donc la fonction sinus et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives

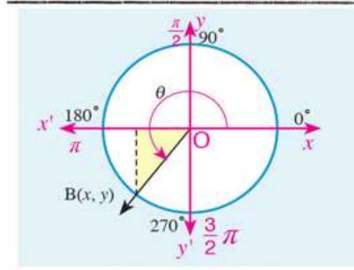



**Premier quadrant**

$x > 0$

$y > 0$

Le côté final de l'angle est situé au premier quadrant. Donc toutes les fonctions trigonométriques de l'angle. ayant pour côté final $\overrightarrow{OB}$ sont positives.

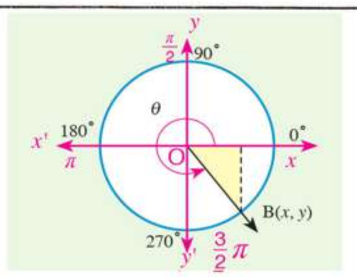



**Troisième quadrant**

$x < 0$

$y < 0$

Le côté final de l'angle est situé au troisième quadrant. Donc la fonction tangente et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.




**Quatrième quadrant**

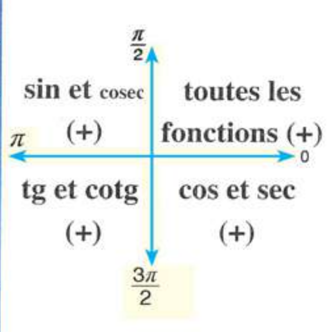
$x > 0$

$y < 0$

Le côté final de l'angle est situé au quatrième quadrant.
Donc la fonction cosinus et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.

Nous pouvons résumer les signes de toutes fonctions trigonométriques dans le tableau suivant :

| Quadrant auquel appartient le côté final de l'angle | Intervalle auquel appartient la mesure de l'angle | Signe des fonctions trigonométriques | | |
|---|---|---|---|---|
| | | sin et cosec | cos et sec | tg et cotg |
| Premier | $]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ | + | + | + |
| Deuxième | $]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$ | + | − | − |
| Troisième | $]\pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}[$ | − | − | + |
| Quatrième | $]\frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\pi[$ | − | + | − |




**Exemple**

1. Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

**A** sin 130° **B** tg 315° **C** cos 650° **D** sec (-30°)

**Solution**

**A** L'angle de mesure 130° est situé au deuxième quadrant $\therefore$ sin 130° est positif

**B** L'angle de mesure 315° est situé au quatrième quadrant $\therefore$ tg 315° est négatif.

**C** L'angle de mesure 650° est équivalent à un angle de mesure $650° - 360° = 290°$

$\therefore$ L'angle de mesure 650° est situé au quatrième quadrant. $\therefore$ cos 650° est positif.

**D** L'angle de mesure (-30°) est équivalent à un angle de mesure $-30° + 360° = 330°$

L'angle de mesure (-30°) est situé au quatrième quadrant. $\therefore$ sec (-30°) est positif.

## Essaie de résoudre

**1** Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

**A** cos 210° **B** sin 740° **C** tg (- 300°) **D** sin 1230°

## Exemple

**2** Soit l'angle $\angle$ AOB de mesure $\theta$ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, trouve les rapports trigonométriques de base de $\angle$ AOB si les coordonnées du point B sont :

**A** (0, -1) **B** $(\frac{1}{\sqrt{2}}, y)$ **C** $(-x, x)$

où $x > 0$ , $y > 0$

### Solution

**A** $\cos\theta = 0$ , $\sin\theta = -1$ et $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{0}$ (indéfini)

**B** $x^2 + y^2 = 1$ (cercle trigonométrique) en remplaçant $x$ par : $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1$ d'où $y^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ , $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ (refusée)

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , $\text{tg}\,\theta = 1$

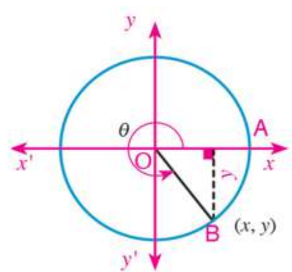
**C** $(-x)^2 + (x)^2 = 1$ $\therefore 2x^2 = 1$ $\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $x > 0$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , $\text{tg}\,\theta = -1$

**3** Si $270° < \theta < 360°$ et si $\sin\theta = -\frac{5}{13}$, trouve tous les rapports trigonométriques de base de l'angle de mesure $\theta$

### Solution




Soient m ($\angle$ AOB) = $\theta$ où $\theta$ est situé au quatrième quadrant et les cordonnées du point B sont $(x, y)$

$\because y = \sin\theta = -\frac{5}{13}$ , $x = \cos\theta$ où $\cos\theta > 0$

$\because x^2 + y^2 = 1$ $\therefore \cos^2\theta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$ $\therefore \cos^2\theta = \frac{144}{169}$ , $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ou $\cos\theta = -\frac{12}{13}$

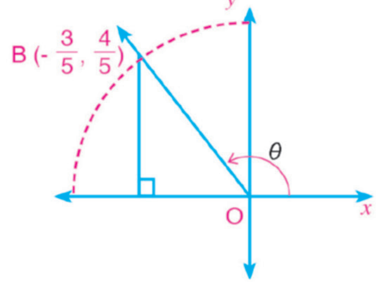
$\cos\theta = \frac{12}{13}$ (Pourquoi ?) $\text{tg}\,\theta = -\frac{5}{12}$

## Essaie de résoudre

**2** Si $90° < \theta < 180°$ et si $\sin \theta = \frac{4}{5}$, trouve $\cos \theta$ et $\text{tg}\ \theta$ où $\theta$ est un angle en position standard dans le cercle trigonométrique

**Exemple**

**4** Soit un angle de mesure $\theta$ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $B\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle $\theta$.




**Solution**

$\sin \theta = \frac{4}{5}$ , $\cos \theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ et $\text{tg}\ \theta = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

$\text{cosec}\ \theta = \frac{5}{4}$ , $\sec \theta = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ et $\text{cotg}\ \theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

## Essaie de résoudre

**3** Soit un angle de mesure $\theta$ en position standard. Trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle $\theta$ sachant que son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B dans chacun des cas suivants :

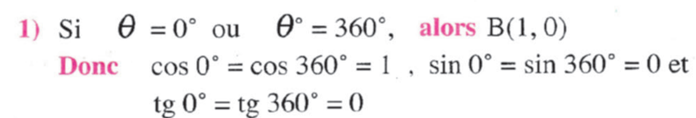
**A** $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ **B** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **C** $\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

## Fonctions trigonométriques de certains angles particuliers

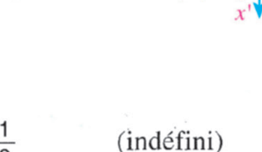
**Dans la figure ci-contre, le cercle trigonométrique coupe les deux axes aux points**

$A_1(1, 0), A_2(0, 1), A_3(-1, 0), A_4(0, -1)$.

Soit $\theta$ la mesure de l'angle orienté AOB en position standard tel que son côté final $\overrightarrow{OB}$ coupe le cercle trigonométrique en B.



**1)** Si $\theta = 0°$ ou $\theta° = 360°$, **alors** B(1, 0)
**Donc** $\cos 0° = \cos 360° = 1$ , $\sin 0° = \sin 360° = 0$ et
$\text{tg}\ 0° = \text{tg}\ 360° = 0$



**2)** Si $\theta° = 90° = \frac{\pi}{2}$, **alors** B(0, 1)
**Donc** $\cos 90° = 0$ , $\sin 90° = 1$ , $\text{tg}\ \theta = \frac{1}{0}$ (indéfini)

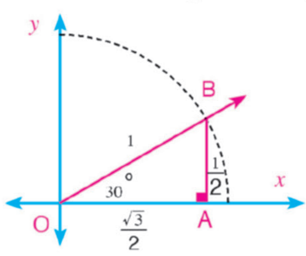
**3)** Si $\theta° = 180° = \pi$, **alors** B(-1, 0)
**Donc** $\cos 180° = -1$ , $\sin 180° = 0$ , $\text{tg}\ 180° = 0$

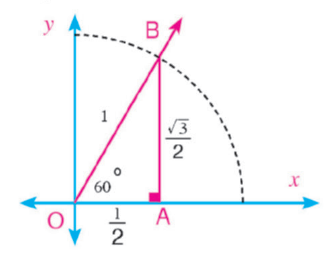
**4)** Si $\theta° = 270° = \frac{3\pi}{2}$ , **alors** B(0, -1)

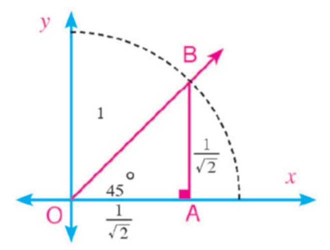
**Donc** $\cos 270° = 0$ , $\sin 270° = -1$ , $\text{tg } 270° = \frac{-1}{0}$ (indéfini)

## Essaie de résoudre

**4** Dans chacune de figures suivantes, détermine les coordonnées du point B, puis déduis les fonctions trigonométriques des angles de mesures 30°, 60°, 45°




**Exemple**

**5** Sans utiliser de calculatrice, démontre que $\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30° = \sin^2 \frac{\pi}{3}$

**Solution**

**On sait que** $\sin 30° = \frac{1}{2}$ , $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Membre gauche $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1)

$\because \frac{\pi}{4} = 45°$ , $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Membre droit $= \sin^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (2)

De (1) et (2), les deux membres sont égaux.

## Essaie de résoudre

**5** Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de $3 \sin 30° \sin 60° - \cos 0° \sec 60° + \sin 270° \cos^2 45°$

**6** **Réflexion critique :** Soit $\theta$ la mesure d'un angle en position standard. Si $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est-il possible que $\theta$ soit égale à 240° ? Explique ta réponse.

## Test de compréhension

Démontre chacune des égalités suivantes :

**A** $1 - 2\sin^2 90° = \cos 180°$ **B** $\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4}$

# 4 - 4 Angles associés

### A apprendre

- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $180^\circ \pm \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $360^\circ - \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $90^\circ \pm \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $270^\circ \pm \theta$
- Solution générale des équations trigonométriques de la forme :
  - $\sin \alpha = \cos \beta$
  - $\sec \alpha = \operatorname{cosec} \beta$
  - $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$

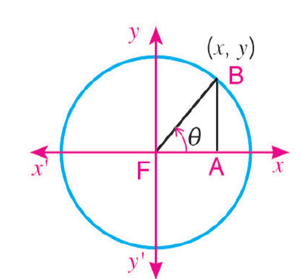
### Expressions de base

- Deux angles associés

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

**Réfléchis et discute**

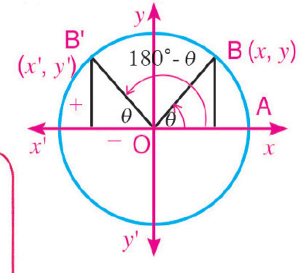



Tu as déjà étudié la symétrie axiale et ses propriétés. **La figure ci-contre** montre un angle orienté AOB, en position standard, de mesure $\theta$ où $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B (x ; y).

Détermine le point B' image du point B par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis écris ses coordonnées.

Quelle est la mesure de $\angle$ AOB'? $\angle$ AOB' est-il en position standard ?

## 1- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $(180^\circ - \theta)$




**Dans la figure ci-contre,** B' $(x', y')$ est l'image de $B(x, y)$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. $x' = -x$ , $y' = -y$ Donc :

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta \quad , \operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \quad , \sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \theta) = -\operatorname{tg}\theta \quad , \operatorname{cotg}(180^\circ - \theta) = -\operatorname{cotg}\theta$$

**Par exemple :** $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**Essaie de résoudre**

1. Trouve $\operatorname{tg} 135^\circ$ , $\sin 120^\circ$ , $\cos 150^\circ$

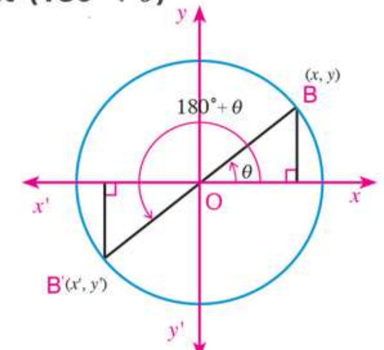
**Remarque que:** $\theta + (180^\circ - \theta) = 180^\circ$

On dit que les deux angles $\theta$ et $(180^\circ - \theta)$ **sont associés.**




Deux angles sont associés si la somme ou la différence de leurs mesures est égale à $n \times 90^\circ$ où $n \in \mathbb{Z}$.

## 2- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $(180^\circ + \theta)$




**Dans la figure ci-contre,**

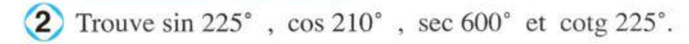
B'$(x', y')$ est l'image de B$(x, y)$ par la symétrie par rapport au pont d'origine O.

On a : $x' = -x$, et $y' = -y$ Donc :

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta \;,\; \text{cosec}(180^\circ + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$$
$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta \;,\; \sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$$
$$\text{tg}(180^\circ + \theta) = \text{tg}\,\theta \;,\; \text{cotg}(180^\circ + \theta) = \text{cotg}\,\theta$$

**Par exemple :**

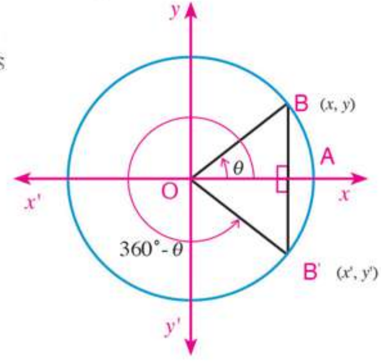
$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\text{tg}\,240^\circ = \text{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$$



**Essaie de résoudre**

**2** Trouve $\sin 225^\circ$ , $\cos 210^\circ$ , $\sec 600^\circ$ et $\text{cotg}\,225^\circ$.

## 3- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ , $(360^\circ - \theta)$




**Dans la figure ci-contre,**

B'$(x', y')$ est l'image de B$(x, y)$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

On a : $x' = x$ , $y' = -y$ Donc :

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta \;,\; \text{cosec}(360^\circ - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$$
$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta \;,\; \sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$$
$$\text{tg}(360^\circ - \theta) = -\text{tg}\,\theta \;,\; \text{cotg}(360^\circ - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$$

**Par exemple :**

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Remarque que**

**Les fonctions trigonométriques des angles $(-\theta)$ et $(360^\circ - \theta)$ sont identiques.**

**Essaie de résoudre**

**3** Trouve : $\sin 315^\circ$ , $\text{cosec}\,315^\circ$ , $\text{tg}\,330^\circ$ , $\text{tg}\,300^\circ$

**Réflexion critique :** Comment peut-on trouver $\sin(-45^\circ)$ , $\cos(-60^\circ)$ , $\text{tg}(-30^\circ)$ et $\sin 690^\circ$.

**Exemple**

**6** Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de l'expression :

$\sin 150^\circ \cos(-300^\circ) + \cos 930^\circ \text{ cotg } 240^\circ$

**Solution**

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos(-300^\circ) = \cos(-300^\circ + 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 930^\circ = \cos(930^\circ - 2 \times 360^\circ) = \cos 210^\circ = \frac{1}{2}$

Donc $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{cotg } 240^\circ = \text{cotg}(180^\circ + 60^\circ) = \text{cotg } 60^\circ = \frac{1}{\text{tg}60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

L'expression $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

**Essaie de résoudre**

**4** Démontre que : $\sin 600^\circ \cos(-30^\circ) + \sin 150^\circ \cos(-240^\circ) = -1$

## 4- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $(90^\circ - \theta)$

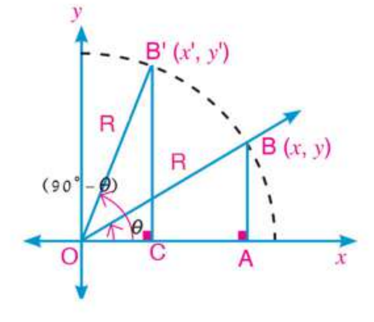
La figure ci-contre indique une partie d'un cercle de centre O.

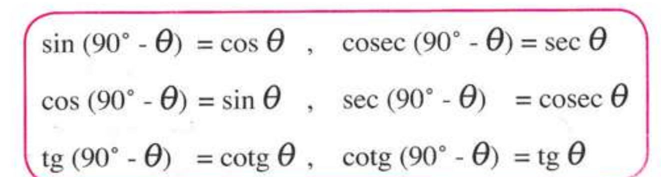
L'angle de mesure $\theta$ est en position standard et a pour rayon R.

De la superposition des deux triangles OAB et OCB':

**On a :** $x' = y \quad , \quad y' = x$

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles $\theta$ et $(90^\circ - \theta)$ :



$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \quad , \quad \text{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \quad , \quad \sec(90^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta$

$\text{tg}(90^\circ - \theta) = \text{cotg}\,\theta \quad , \quad \text{cotg}(90^\circ - \theta) = \text{tg}\,\theta$

**Exemple**

**1** Si le côté final d'un angle de mesure $\theta$, en position standard, passe par le point $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, trouve les fonctions trigonométriques : $\sin(90^\circ - \theta)$ et $\text{cotg}(90^\circ - \theta)$



$\because \sin(90° - \theta) = \cos \theta$ $\therefore \sin(90° - \theta) = \frac{3}{5}$

$\because \text{cotg}(90° - \theta) = \text{tg } \theta$ $\therefore \text{cotg}(90° - \theta) = \frac{4}{3}$

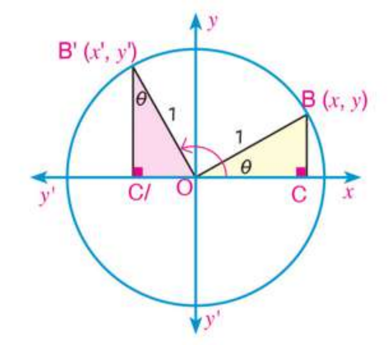
**Essaie de résoudre**

5) Dans l'exemple précédent, calcule $\cos(90° - \theta)$ et $\text{cosec}(90° - \theta)$

## 5- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $(90° + \theta)$

**De la superposition des deux triangles** B'C'O et OCB

**On a :** $y' = x$ , $x' = -y$




Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles $\theta$ et $(90° + \theta)$ comme suit :

| | |
|---|---|
| $\sin(90° + \theta) = \cos \theta$ , | $\text{cosec}(90° + \theta) = \sec \theta$ |
| $\cos(90° + \theta) = -\sin \theta$ , | $\sec(90° + \theta) = -\text{cosec } \theta$ |
| $\text{tg}(90° + \theta) = -\text{cotg } \theta$ , | $\text{cotg}(90° + \theta) = -\text{tg } \theta$ |

**Exemple**

2) Si le côté final d'un angle de mesure $\theta$ , en position standard, passe par le point $(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ trouve les fonctions trigonométriques $\text{tg}(90° + \theta)$ et $\text{cosec}(90° + \theta)$

**Solution**

$\because \text{tg}(90° + \theta) = -\text{cotg } \theta$ $\therefore \text{tg}(90° + \theta) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\because \text{cosec}(90° + \theta) = \sec \theta$ $\therefore \text{cosec}(90° + \theta) = 3$

**Essaie de résoudre**

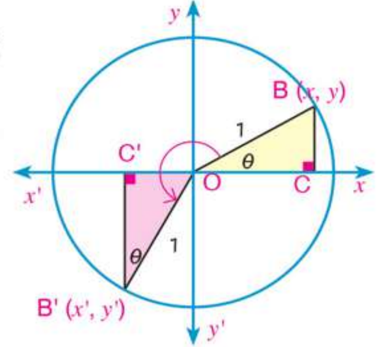
6) Dans l'exemple précédent, calcule : $\sin(90° + \theta)$ , $\sec(90° + \theta)$

## 6- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $(270° - \theta)$

**De la superposition des deux triangles** B'C'O , OCB

On a : y' = – x et x' = – y

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles $\theta$ et $(270° - \theta)$ comme suit :




$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ , $\text{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$

$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$ , $\sec(270° - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$

$\text{tg}(270° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$ , $\text{cotg}(270° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

**Exemple**

**3** Si le côté final d'un angle de mesure $\theta$, en position standard, passe par le point $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ trouve les fonctions trigonométriques : $\cos(270° - \theta)$ et $\text{cotg}(270° - \theta)$

**Solution**

$\because \cos(270° - \theta) = -\sin\theta$ $\quad\therefore \cos(270° - \theta) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\because \text{cotg}(270° - \theta) = \text{tg}\,\theta$ $\quad\therefore \text{cotg}(270° - \theta) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**Essaie de résoudre**

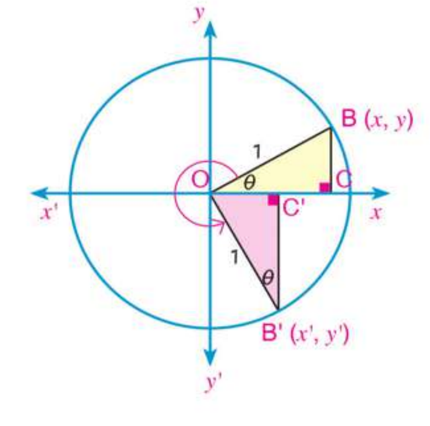
**7** Dans l'exemple précédent, calcule $\text{tg}(270° - \theta)$ et $\text{cosec}(270° - \theta)$

## 7- Fonctions trigonométriques des deux angles $\theta$ et $(270° + \theta)$

De la superposition des deux triangles : B'C'O, OCB

On a : y' = – x et x' = y

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles $\theta$ et $(270° + \theta)$ comme suit :




$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$ , $\text{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta$

$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$ , $\sec(270° + \theta) = \text{cosec}\,\theta$

$\text{tg}(270° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$ , $\text{cotg}(270° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

**Exemple**

**4** Si le côté final d'un angle de mesure $\theta$, en position standard, passe par le point $(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$ trouve les fonctions trigonométriques : $\sin(270° + \theta)$ et $\sec(270° + \theta)$

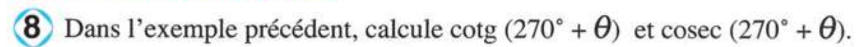


**Solution**

$\because \sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$ $\qquad \therefore \sin(270^\circ + \theta) = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\because \sec(270^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ $\qquad \therefore \sec(270^\circ + \theta) = \dfrac{3}{2}$

**Essaie de résoudre**



**8** Dans l'exemple précédent, calcule $\operatorname{cotg}(270^\circ + \theta)$ et $\operatorname{cosec}(270^\circ + \theta)$.

## Solution générale d'une équation trigonométrique de la forme

***[sin(α) = cos(β), sec(α) = cosec (β) ou tg (α) = cotg (β)]***




Tu as déjà étudié que si $\alpha$ et $\beta$ sont les mesures de deux angles complémentaires (leur somme est égale à 90°) alors $\sin\alpha = \cos\beta$, sec = cosec $\beta$ et tg = cotg $\beta$, , alors $\alpha + \beta = 90°$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux angles aigus. Mais si $\sin\theta = \cos 150°$ , quelles sont les valeurs attendues de $\theta$ ?




**1-** Si $\sin\alpha = \cos\beta$ (où $\alpha$ et $\beta$ sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

- $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient :** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \beta)$ **et par conséquent on obtient :** $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ **d'où** $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

**En ajoutant $2\pi$n à l'angle $\frac{\pi}{2}$ on obtient :**

| **Si** $\sin\alpha = \cos\beta$ , **alors** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ |
|---|

(où $n \in \mathbb{Z}$), De même :

| **Si** $\operatorname{cosec}\alpha = \sec\beta$ , **alors** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ |
|---|

(où $n \in \mathbb{Z}$), $\alpha \neq n\pi$ et $\beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

**2-** Si $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$ (où $\alpha$ et $\beta$ sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient** $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$

**En ajoutant $2\pi$n aux deux angles $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ on obtient :**

| **Si** $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ , **alors** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi n$ |
|---|

(où $n \in \mathbb{Z}$), $\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $\beta \neq n\pi$

**Exemple**

5 Résous l'équation : $\sin 2\theta = \cos\theta$

**Solution**

$\sin 2\theta = \cos\theta$

$2\theta \pm \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$ — **de la définition de l'équation**

**(1) Soit** $2\theta + \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ **d'où** $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$ — **en divisant les deux membres par 3**

**(2) ou** $2\theta - \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ **d'où** $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

L'ensemble solution est : $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$ ou $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

## Essaie de résoudre

9 Résous chacune des équations suivantes :

A $\sin 4\theta = \cos 2\theta$ B $2\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$ C $\cos 5\theta = \sin\theta$

10 **Déceler l'erreur :** Dans un concours de mathématiques, l'enseignant a demandé à Karim et à Ziaad de trouver la valeur de $\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ Qui a trouvé la bonne réponse ? Explique ta réponse.

**Réponse de Karim**

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi + \theta - \frac{\pi}{2})$

$= \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

$= -\cos\theta$

**Réponse de Ziaad**

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin[-(\frac{\pi}{2} - \theta)]$

$= -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$= -(-\cos\theta) = \cos\theta$

## Test de compréhension

Trouve toutes les valeurs de $\theta$ où $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifient chacune des équations suivantes :

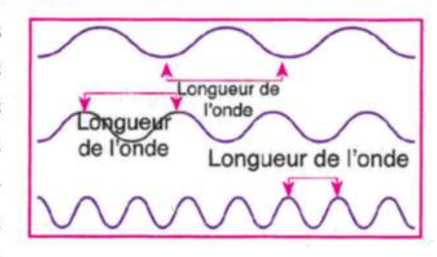
A $\sin\theta - \cos\theta = 0$ B $\mathrm{cosec}(\theta - \frac{\pi}{6}) = \sec\theta$ C $2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$

# Représentation graphique des fonctions trigonométriques

4 - 5




Les ultrasons sont basés sur des hautes fréquences de longueurs d'ondes différentes. Ils sont utilisés dans l'imagerie médicale. Ils sont utilisés également comme radar dans les sous-marins travaillant dans les profondeurs de l'océan. La représentation de ces ultrasons graphiquement permet d'étudier les propriétés des fonctions sinus et cosinus. Avec tes camarades, effectue le travail en groupe suivant :




### A apprendre

- Représentation de la fonction sinus et déduction de ses propriétés.
- Représentation de la fonction cosinus et déduction de ses propriétés

## Représentation graphique de la fonction sinus




**1** Avec tes camarades, complète le tableau suivant :

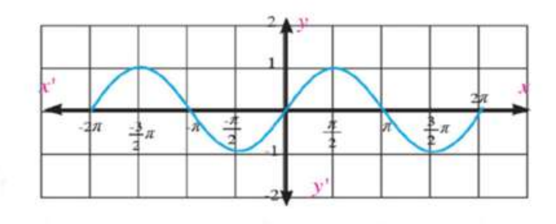
| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{9\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | 0,5 | | | | | | | |

**2** Trace la courbe en joignant tous les points.

**3** Dresse un autre tableau en utilisant les opposés des valeurs présentées dans le tableau précédent.

**4** Représente tous les points obtenus dans un repère.

**5** Complète la courbe représentative en joignant tous les points.



**6** As-tu remarqué qu'il existe des valeurs maximales et des valeurs minimales de cette courbe? Explique ta réponse.

### Expressions de base

- Fonction sinus
- Fonction cosinus
- Valeur maximale
- Valeur minimale

### Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique
- Logiciels




## Propriétés de la fonction sinus

Si $f$ est une fonction telle que $f(\theta) = \sin\theta$ , alors :

- ★ le domaine de définition de la fonction sinus est ]- ∞ ; + ∞[ et son ensemble image est [- 1, 1]
- ★ la fonction cosinus est une fonction périodique de période $2\pi$ ce qui signifie qu'on peut déplacer la courbe dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers la gauche ou vers la droite de $2\pi$ unités, de $4\pi$ unités, de $6\pi$ unités, ... etc.
- ★ la valeur maximale de la fonction sinus est égale à 1 et on l'obtient aux points d'abscisses
  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$
- ★ la valeur minimale de la fonction sinus est égale à - 1 et on l'obtient aux points d'abscisses
  $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

## Représentation graphique de la fonction cosinus




**1** Avec tes camarades, complète le tableau suivant :

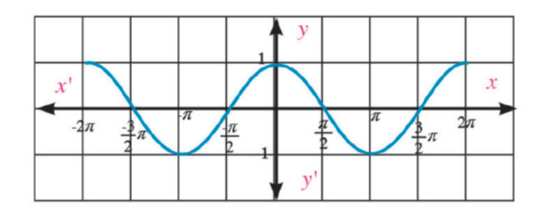
| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{9\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | 1 | 0,8 | | | | | | | |

**2** Trace la courbe en joignant tous les points.

**3** Dresse un autre tableau en utilisant les opposés des valeurs présentées dans le tableau précédent.

**4** Représente tous les points obtenus dans un repère.

**5** Complète la courbe représentative en joignant tous les points.







## Propriétés de la fonction sinus

Si $f$ est une fonction telle que $f(\theta) = \cos\theta$ alors :

- ★ le domaine de définition de la fonction cosinus est ]- ∞ ; + ∞[ et son ensemble image est [-1, 1]
- ★ la fonction cosinus est une fonction périodique de période $2\pi$, ce qui signifie qu'on peut déplacer la courbe dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers la gauche ou vers la droite de $2\pi$ unités, de $4\pi$ unités, de $6\pi$ unités, ... etc.

★ la valeur maximale de la fonction cosinus est égale à 1 et on l'obtient aux points d'abscisses

$\theta = \pm 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

★ la valeur minimale de la fonction cosinus est égale à (- 1) et on l'obtient aux points d'abscisses

$\theta = \pi + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

**Exemple**

① **Lien avec la physique :** A marrée haute, un navire peut entrer dans un port si la profondeur de l'eau n'est pas inferieure à 10 mètres. Si le mouvement du flux et du reflux suit la relation , $p = 6 \sin (15\, t)^\circ + 10$ où t est le temps écoulé en heures après minuit selon le système horaire de 24 heures et p est la profondeur de l'eau. Trouve le nombre de fois où la profondeur de l'eau atteint 10 mètres exactement.

Représente graphiquement la relation qui montre le changement de la profondeur de l'eau pendant le flux et le reflux durant un jour.

 **Solution**

La relation entre t en heures et la profondeur P en mètres est

**$p = 6 \sin (15\, t)^\circ + 10$**

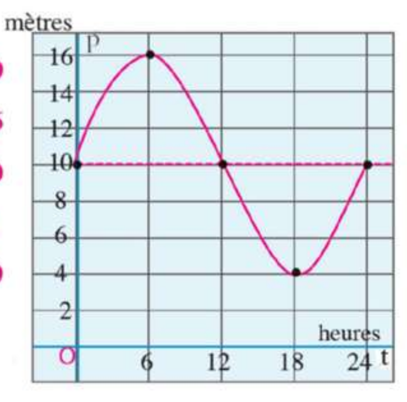
**Pour t = 0** $p = 6 \sin (15 \times 0) + 10 \quad = 6 \sin 0 + 10 \quad = \mathbf{10}$

**Pour t = 6** $p = 6 \sin (15 \times 6) + 10 \quad = 6 \sin 90^\circ + 10 \quad = \mathbf{16}$

**Pour t = 12** $p = 6 \sin (15 \times 12) + 10 \quad = 6 \sin 180^\circ + 10 \quad = \mathbf{10}$

**Pour t = 18** $p = 6 \sin (15 \times 18) + 10 \quad = 6 \sin 270^\circ + 10 \quad = \mathbf{4}$

**Pour t = 24** $p = 6 \sin (15 \times 24) + 10 \quad = 6 \sin 360^\circ + 10 \quad = \mathbf{10}$




| t en heures | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| P en mètres | 10 | 16 | 10 | 4 | 10 |

**Dans le tableau, on trouve que la profondeur de l'eau atteint 10 mètres si t = 10, 12 et 24 heures**

## Essaie de résoudre

① Dans l'exemple précédent, trouve le nombre d'heures d'un jour pendant lesquelles le navire peut entrer dans le port

## Test de compréhension

① Trace la courbe représentative de la fonction $y = 3 \sin x$ où $x \in [0, 2\pi]$

② Trace la courbe représentative de la fonction $y = 2\cos x$ où $x \in [0, 2\pi]$

# 4 - 6 Trouver la mesure d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques

**A apprendre**

- Trouver la mesure d'un angle en connaissant une fonction trigonométrique.

**Expressions de base**

- Fonction trigonométrique

**Matèriel et moyens**

- Une calculatrice scientifique






On sait que si $y = \sin\theta$ , alors on peut trouver la valeur de y en connaissant la valeur de $\theta$, En connaissant une valeur de y, peut-on également trouver la valeur de $\theta$ ?




**Si** $y = \sin\theta$ , **alors** $\theta = \sin^{-1} y$

**Par exemple,** si $\theta$ est un angle aigu positif et si $y= \frac{1}{2}$,

**alors** cette relation s'écrit $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$

**Exemple**

**1** Trouve $\theta$ tel que $0° < \theta < 360°$ qui vérifie chacun des cas suivants :

**A** $\theta = \sin^{-1} 0{,}6325$ **B** $\theta = \text{cotg}^{-1} (- 1{,}6204)$

**Solution**

**A** $\because \sin\theta > 0$

$\therefore$ l'angle est situé au premier ou au deuxième quadrant.

**En utilisant une calculatrice :**

SHIFT | sin⁻¹ | 0 | . | 6 | 3 | 2 | 5 | = | °′″

Dans le premier quadrant : $\theta = 39° 14' 6''$

Dans le deuxième quadrant : $\theta = 180° - 39° 14' 6'' = 140° 45' 54''$

**B** $\because \text{cotg}\,\theta < 0$

$\therefore$ l'angle est situé au deuxième ou au quatrième quadrant.

**En utilisant une calculatrice :**

SHIFT | tan⁻¹ | 1 | . | 6 | 2 | 0 | 4 | x⁻¹ | = | °′″

Dans le deuxième quadrant $\theta = 180° - 31° 40' 48'' = 148° 19' 12''$

Dans le quatrième quadrant $\theta = 360° - 31° 40' 48'' = 328° 19' 12''$

Peux-tu vérifier ses réponses en utilisant une calculatrice ?

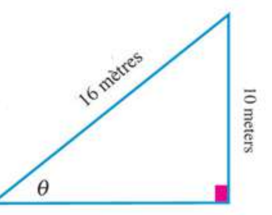
## Essaie de résoudre

1) Trouve $\theta$ tel que $0° < \theta < 360°$ qui vérifie chacun des cas suivants :

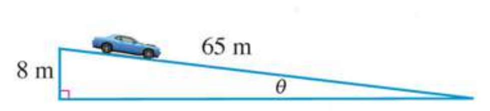
A $\theta = \cos^{-1} 0,6205$ B $\theta = tg^{-1} (-2,3615)$ C $\theta = cosec^{-1} (-2,103$

## Test de compréhension

1) **Lien avec les jeux sportifs :** Dans un parc d'attraction, la hauteur d'un toboggan est 10 mères et sa longueur est 16 mètres, écris une fonction trigonométrique permettant de trouver la valeur de $\theta$ , en degrés à un millième près.




2) **Voitures :** En voiture, Karim se dirige ver le bas d'une descente de longueur 65 mètres et de hauteur 8 mètres. Si la descente fait avec l'horizontale un angle de mesure $\theta$ calcule en degrés la valeur de $\theta$.

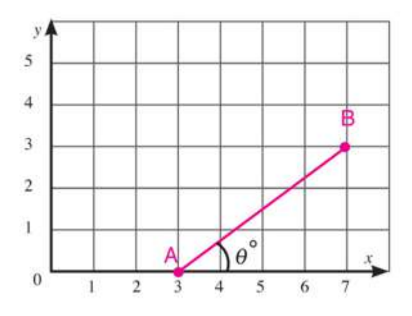



3) **Déceler l'erreur :** A cause du vent, un palmier de taille 20 mètres s'est cassé pour prendre la formé indiquée dans la figure ci-contre. Si la longueur de la partie verticale du palmier est 7 mètres et celle de la partie oblique est 13 mètres et si $\theta$ est la mesure de l'angle formé par la partie cassé et le sol, calcule en degrés la valeur de $\theta$.



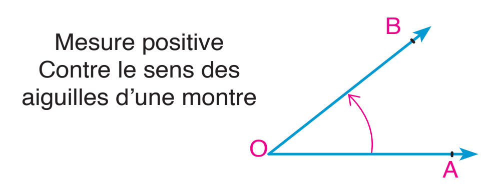

| Réponse de Karim | Réponse d'Omar |
|---|---|
| $\because cosec\ \theta = \frac{13}{7} \quad \therefore \theta = cosec^{-1} \frac{13}{7}$ <br> $\therefore \theta = 32° 34' 44''$ | $\because \sec \theta = \frac{13}{7} \quad \therefore \theta = \sec^{-1} \frac{13}{7}$ <br> $\therefore \theta = 57° 25' 16''$ |

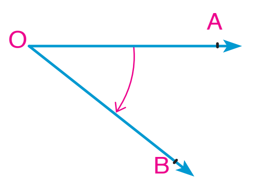
4) **Réflexion critique :** La figure ci-contre, représente un segment reliant deux points A(3, 0), B (7, 3), Trouve la mesure de l'angle formé entre $\overline{AB}$ et l'axe des abscisses .



# Résumé de l'unité

**1** **L'angle orienté :** C'est un couple de demi-droites ( $\overrightarrow{OA}$ , $\overrightarrow{OB}$ ) de même origine. L'origine est le sommet de l'angle et les deux demi-droites sont les côtés de l'angle. $\overrightarrow{OA}$ est appelé le côté initial de l'angle et $\overrightarrow{OB}$ est appelé son côté final.




**2** **Position standard d'un angle :** Dans un repère orthogonal, si le sommet de l'angle est le point d'origine et son côté initial est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.

**3** **Angles équivalents :** Ce sont les angles en position standard dont la mesure est sous la forme $(\theta \pm n \times 360^\circ)$ où $n \in \mathbb{Z}$ et ayant le même côté final.

**4** **Le radian :** C'est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale à la longueur du rayon du cercle .

**5** **Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians :** Si un angle a pour mesure en radians $\theta^{rad}$ et pour mesure en degrés $x^\circ$ alors :

$\theta^{rad} = x^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ}$ et $x^\circ = \theta^{rad} \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

**6** **Longueur de l'arc :** Si $\theta^{rad}$ est la mesure de l'angle au centre d'un cercle de longueur de rayon R intercepte un arc de longueur L, alors $L = \theta^{rad} \times R$

**7** **Angle quadrant :** C'est un angle en position standard dont le côté final est situé sur l'un des deux axes.

**8** **Cercle trigonométrique :** C'est un cercle dans un repère orthogonal ayant pour centre le point d'origine du repère et pour longueur de rayon l'unité de longueur.

**9** **Rapport trigonométriques :** C'est le rapport entre les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

**10** **Signe des fonctions trigonométriques :**

**Remarque que :**

| **Premier quadrant :** | **Deuxième quadrant :** | **Troisième quadrant :** | **Quatrième quadrant:** |
|---|---|---|---|
| $0^\circ < \theta < 90^\circ$<br>Toutes les fonctions trigonométriques sont positives | $90^\circ < \theta < 180^\circ$<br>sin $\theta$ et cosec $\theta$ sont positives.<br>Les autres fonctions sont négatives. | $180^\circ < \theta < 270^\circ$<br>tg $\theta$ et cotg $\theta$ sont positives.<br>Les autres fonctions sont négatives. | $270^\circ < \theta < 360^\circ$<br>cos $\theta$ et sec $\theta$ sont positives.<br>Les autres fonctions sont négatives. |

**11** Fonctions trigonométrique des angles ayant pour mesure :

**(1)** $(180° - \theta)$

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\text{cosec}(180° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$
$\text{tg}(180° - \theta) = -\text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}(180° - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$

**(2)** $(180° + \theta)$

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\text{cosec}(180° + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$, $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$
$\text{tg}(180° + \theta) = \text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}(180° + \theta) = \text{cotg}\,\theta$

**(3)** $(360° - \theta)$

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$, $\text{cosec}(360° - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$, $\sec(360° - \theta) = \sec\theta$
$\text{tg}(360° - \theta) = -\text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}(360° - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$

**(4)** $(90° - \theta)$

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(90° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}(90° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

**(5)** $(90° + \theta)$

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$, $\text{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$, $\sec(90° + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(90° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}(90° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

**(6)** $(270° - \theta)$

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$, $\text{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$, $\sec(270° - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(270° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}(270° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

**(7)** $(270° + \theta)$

$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$, $\text{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$, $\sec(270° + \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(270° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}(270° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

**12** Propriétés des fonctions sinus et cosinus

| **Propriété** | **Fonction sinus $f(\theta) = \sin\theta$** | **Fonction cosinus $f(\theta) = \cos\theta$** |
|---|---|---|
| **Domaine de définition et ensemble image** | Le domaine de définition est $]-\infty\,;+\infty[$ et l'ensemble image est $[-1, 1]$ | Le domaine de définition est $]-\infty\,;+\infty[$ et l'ensemble image est $[-1, 1]$ |
| **Valeur maximale** | C'est 1 en $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ | C'est 1 en $\theta = \pm 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ |
| **Valeur minimale** | C'est -1 en $\theta = \frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ | C'est -1 en $\theta = \pi \pm n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ |

**13** Si le côté final d'un angle de mesure $\theta$ en position standard coupe le cercle trigonométrique au point $B(x, y)$, alors $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ Ce sont les fonctions circulaires.

**14** Si $y = \sin\theta$, alors $\theta = \sin^{-1} y$.

